

分类号: O186.1

密 级: 无

单位代码: 10028

学 号: 2210502135

首都师范大学学术硕士学位论文

卡拉比猜想及凯勒-爱因斯坦度量

硕 士 生: 王 源 清

指导教师: 张 振 雷 教 授

学科专业: 基 础 数 学

学科方向: 微 分 几 何

2024 年 6 月 4 日

首都师范大学学位论文原创性声明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已经注明引用的内容外，本论文不含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品成果。对本文的研究做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本人完全意识到本声明的法律结果由本人承担。

学位论文作者签名：

日期： 年 月 日

首都师范大学学位论文授权使用声明

本人完全了解首都师范大学有关保留、使用学位论文的规定，学校有权保留学位论文并向国家主管部门或其指定机构送交论文的电子版和纸质版。有权将学位论文用于非赢利目的的少量复制并允许论文进入学校图书馆被查阅。有权将学位论文的内容编入有关数据库进行检索。有权将学位论文的标题和摘要汇编出版。保密的学位论文在解密后适用本规定。

学位论文作者签名：

导师签名：

日期： 年 月 日

摘 要

卡拉比在 1954 年国际数学家大会上声称有如下定理：对于任意闭凯勒流形 (M^n, ω) ，任给 $\Sigma \in 2\pi c_1(M)$ ，则有且仅有一个凯勒度量 $\Omega \in [\omega]$ ，使得 $Ric(\Omega) = \Sigma$. 这一问题可归结为求解如下关于实值函数 φ 的复蒙日-安培方程：

$$(\omega + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi)^n = e^F \omega^n,$$

其中 $F \in C^\infty(M; \mathbb{R})$. 丘成桐在其著名论文 *On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation. I.* 中给出了该定理的证明。作为推论，对任意 $c_1(M) \leq 0$ 的紧凯勒流形，都存在唯一凯勒-爱因斯坦度量。本文将总结丘成桐原始论文中涉及上述内容的章节，并尽量补充细节。

关键词：卡拉比猜想；复蒙日-安培方程；凯勒-爱因斯坦度量

Abstract

Eugenio Calabi claimed the following theorem at the International Congress of Mathematicians in 1954: For any closed Kähler manifold (M^n, ω) , for any $\Sigma \in 2\pi c_1(M)$, there is only one Kähler metric $\Omega \in [\omega]$, such that $Ric(\Omega) = \Sigma$. This theorem can be reduced to solving the following complex Monge-Ampère equation w.r.t. some real-valued function φ :

$$(\omega + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi)^n = e^F \omega^n,$$

where $F \in C^\infty(M; \mathbb{R})$. Shing-Tung Yau proved this theorem in the remarkable paper *On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation. I.* As a corollary, for any compact Kähler manifold, with $c_1(M) \leq 0$, there is only one Kähler-Einstein metric. This thesis will summarize Yau's original paper and try to provide details.

Keywords: Calabi Conjecture; Complex Monge-Ampère Equation; Kähler-Einstein Metric

目录

第一章 预备知识	1
第二章 复蒙日-安培方程的各阶估计	7
2.1 解的 C^2 估计	7
2.2 解的 C^0 估计	17
2.3 解的 C^3 估计	31
第三章 求解复蒙日-安培方程	33
第四章 具有更一般右端项的复蒙日-安培方程	39
4.1 更一般复蒙日-安培方程解的 C^0 估计	39
4.2 更一般复蒙日-安培方程解的 C^2 估计	44
4.3 更一般复蒙日-安培方程解的 C^3 估计	46
4.4 $c_1(M) \leq 0$ 时凯勒-爱因斯坦度量的存在唯一性	47
第五章 总结与展望	51
参考文献	53
致谢	55

第一章 预备知识

记 M^n 为一个紧光滑流形, 黎曼度量 g 为定义在 $T^*M \otimes T^*M$ 上的光滑截面, 并且对任意一点 $x \in M$, g 为 $T_x M$ 上的一个正定对称二次型, 我们知道黎曼度量必定存在。在局部坐标 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 下, TM 的基表示为 $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\}$, 则 $g = \sum_{i,j} g_{ij} dx^i \otimes dx^j$, 其中 g_{ij} 为关于 x 的光滑函数:

$$g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right).$$

我们称 (M, g) 为一个黎曼流形。

若黎曼流形 (M^{2m}, g) 存在一族坐标卡, 其转移映射两两之间均为全纯映射, 则可以在 M 的切丛 TM 上诱导一个自同构映射 J , 满足 $J^2 = -\text{id}$, 称为 M 上的复结构。有复结构之后, 将与 J 相容, 即满足 $g(u, v) = g(Ju, Jv), \forall u, v \in TM$ 的度量称为 Hermitian 度量, 其必定存在。取 $\omega_g(u, v) = g(Ju, v), u, v \in TM$, 可知 ω_g 为一个实的 $(1, 1)$ -形式, 称为复流形 (M, g, J) 的基本形式。

我们可以将上述黎曼度量 g 复线性延拓到 $T_{\mathbb{C}}M := TM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ 上, 其复维数为 $2m$, 再按 J 的特征值 $\pm i$ 将 $T_{\mathbb{C}}M$ 分为特征子空间 $T^{(1,0)}M$ 与 $T^{(0,1)}M$ 其复维数均为 m . 事实上, 取复坐标系 $(z_1, z_2, \dots, z_m)$, 其中 $z_i = x_i + \sqrt{-1}x_{m+i}$, 我们有: $J\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^{m+i}}, J\frac{\partial}{\partial x^{m+i}} = -\frac{\partial}{\partial x^i}$, 以及 $dz^i = dx^i + \sqrt{-1}dx^{m+i}, d\bar{z}^i = dx^i - \sqrt{-1}dx^{m+i}$.

又因为对任意光滑函数 f , 应有 $df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i = \frac{\partial f}{\partial z_i} dz^i + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}^i} d\bar{z}^i$, 所以对于任意 $i = 1, 2, \dots, m$, 有:

$$\frac{\partial}{\partial z^i} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} - \sqrt{-1} \frac{\partial}{\partial x^{m+i}} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}^i} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} + \sqrt{-1} \frac{\partial}{\partial x^{m+i}} \right).$$

所以我们有:

$$J\left(\frac{\partial}{\partial z^j}\right) = \sqrt{-1} \frac{\partial}{\partial z^j}, \quad J\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^j}\right) = -\sqrt{-1} \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j}.$$

即空间 $T^{(1,0)}M$ 的一组基为 $\{\frac{\partial}{\partial z^1}, \frac{\partial}{\partial z^2}, \dots, \frac{\partial}{\partial z^m}\}$, 空间 $T^{(0,1)}M$ 的一组基为 $\{\frac{\partial}{\partial \bar{z}^1}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^2}, \dots, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^m}\}$.

对于与复结构相容的度量 g ，计算可知，对任意 i, j 有：

$$g\left(\frac{\partial}{\partial z^i}, \frac{\partial}{\partial z^j}\right) = g\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^i}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j}\right) = 0.$$

记 $g_{i\bar{j}} = g\left(\frac{\partial}{\partial z^i}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j}\right)$ ，我们可以将复线性延拓后的与复结构 J 相容的黎曼度量 g 用新坐标系写出：

$$g = \sum_{i,j} (g_{i\bar{j}} dz^i \otimes d\bar{z}^j + \bar{g}_{i\bar{j}} d\bar{z}^i \otimes dz^j).$$

由此可以看出上式的第二部分由前一部分取共轭转置得到，这也是称满足条件的度量 g 为 Hermitian 度量的原因。我们经常取前一部分 $g = \sum_{i,j} g_{i\bar{j}} dz^i \otimes d\bar{z}^j$ 为复流形 M 的度量。

定义 1. 称满足上述条件的 (M^m, g, J) 为一个复流形，其中 m 为流形的复维数。更进一步如果对黎曼流形 (M, g) 的 *Levi-Civita* 联络 ∇ ，有 $\nabla J = 0$ ，则称 (M^m, g, J) 为一个凯勒流形，此时 $\sum_{i,j} g_{i\bar{j}} dz^i \otimes d\bar{z}^j$ 称为流形的凯勒度量，我们常记 $\omega_g = \sqrt{-1} \sum_{i,j} g_{i\bar{j}} dz^i \wedge d\bar{z}^j$ 为流形的凯勒形式。

事实上，对于一个复流形是否是凯勒的我们有如下等价条件 [Huy05]：

引理 1. 对于复流形 (M, g, J) 我们有如下等价命题：

- (i) $\nabla J = 0$;
- (ii) $d\omega_g = 0$;
- (iii) 对任意的 i, j, k ，有：

$$\frac{\partial g_{i\bar{j}}}{\partial z^k} = \frac{\partial g_{k\bar{j}}}{\partial z^i} \text{ 以及 } \frac{\partial g_{i\bar{j}}}{\partial \bar{z}^k} = \frac{\partial g_{i\bar{k}}}{\partial \bar{z}^j};$$

- (iv) 对任意一点 $p \in M$ ，都存在局部全纯法坐标系，即存在局部全纯坐标系 $(z_1, \dots, z_m)$ ，使得对任意 i, j 都有：

$$z_i(p) = 0, g_{i\bar{j}} = \delta_{ij}, dg_{i\bar{j}} = 0.$$

接着我们给出凯勒流形上曲率的计算，参考 [Tia00]：

我们取流形 M 的局部坐标系 $(z_1, \dots, z_n)$ ，以及切空间 $T_{\mathbb{C}}M$ 的一组基为 $(\frac{\partial}{\partial z^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z^n})$ 。首先计算克里斯托弗符号 Γ_{ij}^k ：

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial z^i}} \frac{\partial}{\partial z^j} := \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial z^k} + \Gamma_{ij}^{\bar{k}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k},$$

以及

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial z^i}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j} := \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial z^k} + \Gamma_{ij}^{\bar{k}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k}.$$

由凯勒条件 $\nabla J = 0$ 和复结构满足 $J \frac{\partial}{\partial z^i} = \sqrt{-1} \frac{\partial}{\partial z^i}$, $J \frac{\partial}{\partial \bar{z}^i} = -\sqrt{-1} \frac{\partial}{\partial \bar{z}^i}$, 所以有:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial z^i}} \left(J \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j} \right) = J \nabla_{\frac{\partial}{\partial z^i}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j} + \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial z^i}} J \right) \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j}.$$

上式中第二项为 0, 将第一项按克里斯托弗符号定义写开即得:

$$\sqrt{-1} \left(\Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial z^k} + \Gamma_{ij}^{\bar{k}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k} \right) = J \left(\Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial z^k} + \Gamma_{ij}^{\bar{k}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k} \right) = \sqrt{-1} \left(\Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial z^k} - \Gamma_{ij}^{\bar{k}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k} \right).$$

两边移向有 $\Gamma_{ij}^{\bar{k}} = 0$, 类似的我们可以计算 $\nabla_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}^i}} \left(J \frac{\partial}{\partial z^j} \right)$, 我们可以得到 $\Gamma_{ij}^{\bar{k}} = 0$, 所以最后非零的克里斯托弗符号只剩下 Γ_{ij}^k 和它的共轭 $\Gamma_{\bar{i}\bar{j}}^{\bar{k}} = \overline{\Gamma_{ij}^k}$. 接下来, 我们具体算出 Γ_{ij}^k :

$$\frac{\partial g_{j\bar{k}}}{\partial z^i} = \frac{\partial}{\partial z^i} g \left(\frac{\partial}{\partial z^j}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k} \right) = g \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial z^i}} \frac{\partial}{\partial z^j}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k} \right) = g \left(\Gamma_{ij}^l \frac{\partial}{\partial z^l}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k} \right) = \Gamma_{ij}^l g_{l\bar{k}}.$$

如果我们记 $(g^{l\bar{k}})$ 为 $(g_{l\bar{k}})$ 的逆矩阵, 则:

$$\Gamma_{ij}^l = g^{l\bar{k}} \frac{\partial g_{j\bar{k}}}{\partial z^i} = g^{l\bar{k}} \frac{\partial g_{i\bar{k}}}{\partial z^j}.$$

接着我们将实的曲率算子做复线性延拓: 对任意 $u, v, w \in T_{\mathbb{C}}M$, 定义曲率算子 $R(u, v)w := \nabla_u \nabla_v w - \nabla_v \nabla_u w - \nabla_{[u, v]} w$, 其中 $[u, v]$ 为切向量 u, v 的李括号, 在局部坐标系下为 0. 进一步在局部坐标系下, 令:

$$R_{i\bar{j}k\bar{l}} := \langle R(\partial_i, \partial_j) \partial_k, \partial_{\bar{l}} \rangle.$$

我们可以具体计算 $R_{i\bar{j}k\bar{l}}$:

$$\begin{aligned} R_{i\bar{j}k\bar{l}} &= \langle (\nabla_i \nabla_{\bar{j}} - \nabla_{\bar{j}} \nabla_i) \partial_k, \partial_{\bar{l}} \rangle = -\langle \nabla_{\bar{j}} (\Gamma_{ik}^p \partial_p), \partial_{\bar{l}} \rangle \\ &= -\partial_{\bar{j}} \Gamma_{ik}^p g_{p\bar{l}} = -\partial_{\bar{j}} \left(g^{\bar{q}p} \frac{\partial g_{k\bar{q}}}{\partial z^i} \right) g_{p\bar{l}} \\ &= -g^{\bar{q}p} \frac{\partial^2 g_{k\bar{q}}}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} g_{p\bar{l}} + g^{\bar{q}s} g^{\bar{t}p} \frac{\partial g_{s\bar{l}}}{\partial \bar{z}^j} \frac{\partial g_{k\bar{q}}}{\partial z^i} g_{p\bar{l}} \\ &= -\frac{\partial^2 g_{k\bar{l}}}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} + g^{\bar{q}s} \frac{\partial g_{s\bar{l}}}{\partial \bar{z}^j} \frac{\partial g_{k\bar{q}}}{\partial z^i}. \end{aligned}$$

由上式的结果及凯勒条件的等价命题我们有: $R_{i\bar{j}k\bar{l}} = R_{i\bar{l}k\bar{j}} = R_{k\bar{j}i\bar{l}}$, 即复的曲率算子相较实的曲率算子有更好的对称性。

由定义我们可以看出

$$R(Ju, Jv, w, x) = R(w, x, Ju, Jv) = g(R(w, x)Ju, Jv) = g(R(w, x)u, v) = R(u, v, w, x).$$

因此我们可以定义 Ricci 曲率张量:

$$Rc := R_{i\bar{j}} dz^i \otimes d\bar{z}^j = g^{k\bar{l}} R_{i\bar{j}k\bar{l}} dz^i \otimes d\bar{z}^j.$$

可知 Ricci 张量与复结构 J 相容, 类似基本形式的定义, 我们可以定义:

$$Ric(\omega_g) := Rc(J\cdot, \cdot) = \sqrt{-1} R_{i\bar{j}} dz^i \wedge d\bar{z}^j.$$

同样的我们有 $Ric(\omega_g)$ 为一个实的闭 $(1, 1)$ -形式, 称为复流形 (M, g, J) 的 Ricci 形式, 事实上, 我们有:

$$R_{i\bar{j}} = Rc(\partial_i, \partial_{\bar{j}}) = g^{\bar{l}k} R_{i\bar{j}k\bar{l}} = -\frac{\partial^2}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} \log \det(g_{p\bar{q}}).$$

因此我们也经常记 $Ric(\omega_g) = -\sqrt{-1} \partial \bar{\partial} \log \det(g_{i\bar{j}})$.

接着我们给出一个常用引理, 如下引理和命题均来自于 [Tia00] 第二章:

引理 2 ($\partial\bar{\partial}$ -引理). 记 (M, g) 为一个紧凯勒流形. 若 $\alpha \in H_{\bar{\partial}}^{(1,1)}(M, \mathbb{C})$ 为 d -边缘的, 则存在光滑函数 β , 使得 $\alpha = \partial\bar{\partial}\beta$. 更进一步, 若 α 为实形式的话, 可以选择 $\beta \in C^\infty(M; \mathbb{R})$, 使得 $\alpha = \sqrt{-1} \partial\bar{\partial}\beta$.

我们不加证明的给出如下关于陈类的命题:

命题 1. 给定一个凯勒流形 (M, g, J) , 凯勒形式记为 ω_g , 我们可以定义一个 $(1, 1)$ -形式:

$$\Omega := g^{j\bar{p}} R_{i\bar{p}k\bar{l}} dz^k \wedge d\bar{z}^l,$$

再令:

$$\det \left(I + \frac{t\sqrt{-1}}{2\pi} \Omega \right) = 1 + t\phi_1(g) + t^2\phi_2(g) + \dots$$

则我们有如下结论:

- (i) $d\phi_i(g) = 0$, 因此 $[\phi_i] \in H_{\bar{\partial}}^{i,i}(M, \mathbb{C}) \cap H^{2i}(M, \mathbb{R})$;
- (ii) $[\phi_i(g)]$ 与度量 g 的选择无关, 事实上它仅依赖于流形的复结构 J ;
- (iii) 流形的第 i 个陈类表示为 $c_i(M) := [\phi_i(g)]$.

特别的，我们计算流形第一陈类的代表元：

$$\phi_1(g) = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \Omega_i^i = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} R_{k\bar{l}} dz^k \wedge d\bar{z}^l = -\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial} \log \det(g_{i\bar{j}}).$$

卡拉比在 1954 年 [Cal54] 提出：紧凯勒流形上给定一个第一陈类的代表元，是否能找到一个凯勒度量，使其 Ricci 形式恰好等于该给定的代表元？卡拉比自己证明了唯一性：在每一个凯勒度量的等价类，即凯勒类中，至多只有一个满足条件的凯勒度量。

1978 年丘成桐对这一问题给出了肯定回答，并且证明了在原先凯勒类中存在唯一满足要求的凯勒度量 [Yau78]。更进一步，他在论文中证明了对于第一陈类非正的紧凯勒流形，总是存在凯勒-爱因斯坦度量。特别的，第一陈类为零的流形上存在 Ricci 平坦度量，称为卡拉比-丘流形。

上述问题具体写出就是，对于一个紧凯勒流形 (M, g) ，是否能够找到一个凯勒形式 $\sqrt{-1} \sum_{i,j} \tilde{g}_{i\bar{j}} dz^i \wedge d\bar{z}^j$ 与原度量的凯勒形式 $\sqrt{-1} \sum_{i,j} g_{i\bar{j}} dz^i \wedge d\bar{z}^j$ 在同一个凯勒类里，并且其 Ricci 形式 $Ric(\omega_{\tilde{g}}) = -\sqrt{-1} \partial\bar{\partial} \log \det(\tilde{g}_{i\bar{j}})$ 在 $H_{\bar{\partial}}^{1,1}(M, \mathbb{C}) \cap H^2(M, \mathbb{R})$ 中的等价类为 $2\pi c_1(M)$ 。

我们知道，原流形的 $2\pi c_1(M)$ 由 $-\sqrt{-1} \partial\bar{\partial} \log \det(g_{i\bar{j}})$ 所在等价类表示，又因为二者之差既是 $\bar{\partial}$ -闭的，又是 d -边缘的，由 $\partial\bar{\partial}$ -引理，我们知道存在实值光滑函数 $F \in C^\infty(M; \mathbb{R})$ ，满足：

$$-\sqrt{-1} \partial\bar{\partial} \log \det(\tilde{g}_{i\bar{j}}) = -\sqrt{-1} \partial\bar{\partial} \log \det(g_{i\bar{j}}) + \sqrt{-1} \partial\bar{\partial} F.$$

整理即得：

$$\partial\bar{\partial} \log \frac{\det(\tilde{g}_{i\bar{j}})}{\det(g_{i\bar{j}})} = \partial\bar{\partial} F.$$

因为流形 M 为紧的，并且 $\det(\tilde{g}_{i\bar{j}})/\det(g_{i\bar{j}})$ 为整体定义的函数，由极大值原理可知 $\log \det(\tilde{g}_{i\bar{j}})/\det(g_{i\bar{j}}) - F$ 为常数，因此存在一个正常数 C ，满足：

$$\det(\tilde{g}_{i\bar{j}}) = C \exp\{F\} \det(g_{i\bar{j}}).$$

又因为两个度量的凯勒形式在同一个凯勒类里，同样由 $\partial\bar{\partial}$ -引理，存在实值光滑函数 $\varphi \in C^\infty(M; \mathbb{R})$ ，满足：

$$\sqrt{-1} \sum_{i,j} \tilde{g}_{i\bar{j}} dz^i \wedge d\bar{z}^j = \sqrt{-1} \sum_{i,j} g_{i\bar{j}} dz^i \wedge d\bar{z}^j + \sqrt{-1} \partial\bar{\partial} \varphi.$$

即有：

$$\tilde{g}_{i\bar{j}} = g_{i\bar{j}} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^i \partial \bar{z}^j}.$$

所以卡拉比所问问题，可以转化为求解如下关于实值函数 φ 的复蒙日安培方程：

$$\det \left(g_{i\bar{j}} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} \right) = C \exp\{F\} \det (g_{i\bar{j}}).$$

本文之后内容中的引理、定理及命题，均引用自丘成桐的论文 [\[Yau78\]](#).

第二章 复蒙日-安培方程的各阶估计

假设 M 为一个紧凯勒流形，我们将研究如下关于 φ 的复蒙日-安培方程：

$$\det \left(g_{i\bar{j}} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} \right) = \exp\{F\} \det (g_{i\bar{j}}), \quad (2.1)$$

其中假设 $F \in C^3(M; \mathbb{R}), \varphi \in C^5(M; \mathbb{R})$.

由问题条件，上式左端项为新度量的行列式，所以我们还要求 φ 应使得：

$$g' := \sum_{i,j} (g_{i\bar{j}} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^i \partial \bar{z}^j}) dz^i \otimes d\bar{z}^j,$$

为正定的 Hermitian 度量，并且与原始度量 $g = \sum_{i,j} g_{i\bar{j}} dz^i \otimes d\bar{z}^j$ 在同一个凯勒类里。

我们的目的是证明方程 (2.1) 满足上述条件光滑解的存在性。因为对于蒙日-安培方程，用行列式的求导法则两边求一次导数，即线性化之后，将得到一致椭圆方程，所以为了求解上述方程，可以使用经典求解椭圆方程的方法。我们首先需要得到 φ 的各阶先验估计，最后将用连续性方法证明光滑解的存在性。

2.1 解的 C^2 估计

从 (2.1) 可以看出，对解 φ 加减一个常数，仍将得到上述方程的解，所以不妨假设 φ 满足：

$$\int_M \varphi = 0,$$

为此我们只需要用 $\varphi - \frac{1}{\text{vol}(M)} \int_M \varphi$ 替换原先的 φ 。

将原方程两边取自然对数，再关于 $\frac{\partial}{\partial z^k}$ 微分，用行列式求导法则：

$$\frac{\partial}{\partial z^k} \det (g_{i\bar{j}}) = \det (g_{i\bar{j}}) g^{p\bar{q}} \frac{\partial g_{p\bar{q}}}{\partial z^k},$$

有：

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z^k} \left(\log \det \left(g_{i\bar{j}} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} \right) - \log \det (g_{i\bar{j}}) \right) &= g^{i\bar{j}} \left(\frac{\partial g_{i\bar{j}}}{\partial z^k} + \frac{\partial^3 \varphi}{\partial z^i \partial \bar{z}^j \partial z^k} \right) - g^{i\bar{j}} \frac{\partial g_{i\bar{j}}}{\partial z^k} \\ &= \frac{\partial F}{\partial z^k}. \end{aligned}$$

其中 $g^{i\bar{j}}$ 表示 $(g_{i\bar{j}})$ 逆矩阵转置后的第 (i, j) 个元素。

再将上式两端关于 $\frac{\partial}{\partial \bar{z}^l}$ 求导，由常用的逆矩阵元素求导法则：

$$\frac{\partial g^{i\bar{j}}}{\partial z^k} = -g^{i\bar{q}} \frac{\partial g_{p\bar{q}}}{\partial z^k} g^{p\bar{j}},$$

有：

$$\begin{aligned} & - \sum_{i,j,t,n} g^{t\bar{j}} g^{i\bar{n}} \left(\frac{\partial g_{t\bar{n}}}{\partial \bar{z}^l} + \frac{\partial^3 \varphi}{\partial z^t \partial \bar{z}^n \partial \bar{z}^l} \right) \left(\frac{\partial g_{i\bar{j}}}{\partial z^k} + \frac{\partial^3 \varphi}{\partial z^i \partial \bar{z}^j \partial z^k} \right) \\ & + \sum_{i,j} g^{i\bar{j}} \left(\frac{\partial^2 g_{i\bar{j}}}{\partial z^k \partial \bar{z}^l} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial z^i \partial \bar{z}^j \partial z^k \partial \bar{z}^l} \right) \\ & + \sum_{i,j,k,n} g^{t\bar{j}} g^{i\bar{n}} \frac{\partial g_{t\bar{n}}}{\partial \bar{z}^l} \frac{\partial g_{i\bar{j}}}{\partial z^k} - \sum_{i,j} g^{i\bar{j}} \frac{\partial^2 g_{i\bar{j}}}{\partial z^k \partial \bar{z}^l} = \frac{\partial^2 F}{\partial z^k \partial \bar{z}^l}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

记 Δ 为度量 $\sum_{i,j} g_{i\bar{j}} dz^i \otimes d\bar{z}^j$ 相应的拉普拉斯算子，因为凯勒度量为原来实 Hermitian 复线性延拓后，两个共轭的对角分块矩阵中的一个，而这两个互为共轭的分块矩阵行列式相等，所以凯勒度量 $\sum_{i,j} g_{i\bar{j}} dz^i \otimes d\bar{z}^j$ 的行列式等于实黎曼度量矩阵行列式的算术平方根。

由 Laplace-Beltrami 公式：

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{\det(g_{i\bar{j}})}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{\det(g_{i\bar{j}})} g^{i\bar{j}} \frac{\partial}{\partial x^j} \right),$$

即得：

$$\Delta = \frac{1}{\det(g_{i\bar{j}})} \frac{\partial}{\partial z^i} \left(\det(g_{i\bar{j}}) g^{i\bar{j}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j} \right) = g^{i\bar{j}} \frac{\partial^2}{\partial z^i \partial \bar{z}^j}. \quad (2.3)$$

我们常说 Δ 为度量 $\sum_{i,j} g_{i\bar{j}} dz^i \otimes d\bar{z}^j$ 相应的拉普拉斯算子，又记 Δ' 为度量 $\sum_{i,j} \left(g_{i\bar{j}} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} \right) dz^i \otimes d\bar{z}^j$ 相应的拉普拉斯算子，因此用逆矩阵元素求导公式，我们有：

$$\begin{aligned} \Delta'(\Delta \varphi) &= \sum_{k,l} g^{k\bar{l}} \frac{\partial^2}{\partial z^k \partial \bar{z}^l} \left(g^{i\bar{j}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} \right) \\ &= \sum_{i,j,k,l} g^{k\bar{l}} g^{i\bar{j}} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial z^i \partial \bar{z}^j \partial z^k \partial \bar{z}^l} + \sum_{i,j,k,l} g^{k\bar{l}} \frac{\partial^2 g^{i\bar{j}}}{\partial z^k \partial \bar{z}^l} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} \\ &+ \sum_{i,j,k,l} g^{k\bar{l}} \frac{\partial g^{i\bar{j}}}{\partial z^k} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial z^i \partial \bar{z}^j \partial \bar{z}^l} + \sum_{i,j,k,l} g^{k\bar{l}} \frac{\partial g_{i\bar{j}}}{\partial \bar{z}^l} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial z^i \partial \bar{z}^j \partial z^k}. \end{aligned}$$

因为上式端项与局部坐标选取无关，我们可以方便的选取法坐标系计算，凯勒条件也确保可以选取法坐标系。即在一点处，有 $g_{i\bar{j}} = \delta_{ij}$, $\frac{\partial g_{i\bar{j}}}{\partial z^k} = \frac{\partial g_{i\bar{j}}}{\partial \bar{z}^l} = 0$. 所以上式右端的第三、第四项均等于 0，再从 (2.2) 式中解出关于 φ 的四阶项，代入上式，可得到：

$$\Delta'(\Delta\varphi) = \Delta F + \sum_{i,j,k,n,l} g'^{k\bar{j}} g'^{i\bar{n}} \varphi_{k\bar{n}\bar{l}} \varphi_{i\bar{j}l} + \sum_{i,j,l} g'^{i\bar{j}} R_{i\bar{j}l\bar{l}} - \sum_{i,l} R_{i\bar{i}l\bar{l}} + \sum_{i,j,k,l} g'^{k\bar{l}} R_{i\bar{j}k\bar{l}} \varphi_{j\bar{i}}. \quad (2.4)$$

同样的理由，可以再选取特殊的坐标系，使得：

$$g_{i\bar{j}} = \delta_{ij}, \varphi_{i\bar{j}} = \delta_{ij} \varphi_{i\bar{i}}.$$

这样的坐标系是存在的，因为我们可以先选取坐标系，对角化度量矩阵 $(g_{i\bar{j}})$ ，再用酉矩阵 Q ，在 $A \rightarrow QAQ^T$ 的意义下将矩阵 $A = (\varphi_{i\bar{j}})$ 对角化。

因此有：

$$g'^{i\bar{j}} = \frac{\delta_{ij}}{1 + \varphi_{i\bar{i}}},$$

有了这个结论，在这个特殊坐标系下，考虑 (2.4) 的后三项：

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j,l} g'^{i\bar{j}} R_{i\bar{j}l\bar{l}} - \sum_{i,l} R_{i\bar{i}l\bar{l}} + \sum_{i,j,k,l} g'^{k\bar{l}} R_{i\bar{j}k\bar{l}} \varphi_{j\bar{i}} \\ &= - \sum_{i,l} R_{i\bar{i}l\bar{l}} \frac{\varphi_{i\bar{i}}}{1 + \varphi_{i\bar{i}}} + \sum_{i,l} R_{i\bar{i}l\bar{l}} \frac{\varphi_{i\bar{i}}}{1 + \varphi_{l\bar{l}}} \\ &= - \sum_{i,l} R_{i\bar{i}l\bar{l}} \frac{\varphi_{i\bar{i}} (\varphi_{l\bar{l}} - \varphi_{i\bar{i}})}{(1 + \varphi_{i\bar{i}}) (1 + \varphi_{l\bar{l}})} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ - \sum_{i,l} R_{i\bar{i}l\bar{l}} \frac{\varphi_{i\bar{i}} (\varphi_{l\bar{l}} - \varphi_{i\bar{i}})}{(1 + \varphi_{i\bar{i}}) (1 + \varphi_{l\bar{l}})} - \sum_{i,l} R_{i\bar{i}l\bar{l}} \frac{\varphi_{l\bar{l}} (\varphi_{i\bar{i}} - \varphi_{l\bar{l}})}{(1 + \varphi_{i\bar{i}}) (1 + \varphi_{l\bar{l}})} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,l} R_{i\bar{i}l\bar{l}} \frac{(\varphi_{l\bar{l}} - \varphi_{i\bar{i}})^2}{(1 + \varphi_{i\bar{i}}) (1 + \varphi_{l\bar{l}})}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

注意上式的第三个等号是互换了 i, j 指标再相加，因此需要在系数乘 $\frac{1}{2}$ ，目的是凑出最后一步中的完全平方项。并且在上式中，当 $i = l$ 时，与 $R_{i\bar{i}l\bar{l}}$ 相乘的项为 0。

我们继续化简：

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \sum_{i,l} \frac{(\varphi_{l\bar{l}} - \varphi_{i\bar{i}})^2}{(1 + \varphi_{i\bar{i}})(1 + \varphi_{l\bar{l}})} &= \frac{1}{2} \sum_{i,l} \frac{[(1 + \varphi_{l\bar{l}}) - (1 + \varphi_{i\bar{i}})]^2}{(1 + \varphi_{i\bar{i}})(1 + \varphi_{l\bar{l}})} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i,l} \left(\frac{1 + \varphi_{i\bar{i}}}{1 + \varphi_{l\bar{l}}} + \frac{1 + \varphi_{l\bar{l}}}{1 + \varphi_{i\bar{i}}} - 2 \right) \\
&= \sum_{i,j} \frac{1 + \varphi_{i\bar{i}}}{1 + \varphi_{j\bar{j}}} - m^2.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

上式中对 i, j 均求和，共相加 m^2 次，因此有最后一个等号成立。

因此将 (2.5) 和 (2.6) 代回式 (2.4)，我们得到后续要用到的不等式：

$$\Delta'(\Delta\varphi) \geq \Delta F + \sum_l g^{k\bar{j}} g^{i\bar{n}} \varphi_{k\bar{n}\bar{l}} \varphi_{i\bar{j}l} + \left(\inf_{i \neq l} R_{i\bar{i}l\bar{l}} \right) \left[\sum_{i,l} \frac{1 + \varphi_{i\bar{i}}}{1 + \varphi_{l\bar{l}}} - m^2 \right]. \tag{2.7}$$

上式已经给我们有所启迪，为了求得 φ 的二阶估计，可以考虑某个关于 φ 函数的拉普拉斯，在该函数的最大值点处，有拉普拉斯小于等于 0。我们希望能从这一不等式中得到二阶估计，自然求导过程中会出现包含 φ 本身的项，所以还需要 φ 的 C^0 估计。

接下来，我们将在所取的特殊坐标系中计算，有：

$$\Delta'\varphi = g^{i\bar{j}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} = \frac{\delta_{ij}}{1 + \varphi_{i\bar{i}}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} = \sum_i \frac{\varphi_{i\bar{i}}}{1 + \varphi_{i\bar{i}}} = m - \sum_i \frac{1}{1 + \varphi_{i\bar{i}}}.$$

在丘成桐的论文 [Yau78] 中，他考虑了关于 φ 的函数 $\exp\{-C\varphi\}(m + \Delta\varphi)$ ，其中 C 是一个正常数。

在计算 $\Delta'(\exp\{-C\varphi\}(m + \Delta\varphi))$ 的过程中，将会出现关于 φ 的四阶项和三阶项，用 (2.7) 可将四阶项的下界用三阶项控制，而从计算过程中我们将会看到，由此产生的三阶项恰好能够和原本的三阶项抵消，最后得到关于 φ 二阶项的上界估计，这个上界需要依赖于 φ 的零阶估计。因此如果还能够给出零阶估计，再由我们的方程 (2.1)，用均值不等式即可进一步得到二阶项的一致估计。

接下来我们展开具体计算：

$$\begin{aligned}
\Delta'(\exp\{-C\varphi\}(m + \Delta\varphi)) &= g^{i\bar{j}} \frac{\partial^2}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} (\exp\{-C\varphi\}(m + \Delta\varphi)) \\
&= C^2 \exp\{-C\varphi\} \left(\sum_{i,j} g^{i\bar{j}} \varphi_i \varphi_{\bar{j}} \right) (m + \Delta\varphi) \\
&\quad - C \exp\{-C\varphi\} \sum_{i,j} g^{i\bar{j}} \varphi_i (\Delta\varphi)_{\bar{j}} \\
&\quad - C \exp\{-C\varphi\} \sum_{i,j} g^{i\bar{j}} (\Delta\varphi)_i \varphi_{\bar{j}} \\
&\quad - C \exp\{-C\varphi\} \Delta' \varphi (m + \Delta\varphi) + \exp\{-C\varphi\} \Delta'(\Delta\varphi).
\end{aligned} \tag{2.8}$$

对复的内积，我们仍有如下柯西-施瓦茨不等式：

$$\langle \nabla \varphi, \nabla \Delta \varphi \rangle_{\mathbb{C}} \leq |\nabla \varphi| \cdot |\nabla \Delta \varphi|,$$

其中 $\nabla \varphi := g^{i\bar{j}} \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}^j} \frac{\partial}{\partial z^i}$. 我们可以看到复梯度事实上为黎曼几何中经典梯度算子的一半。

对 (2.8) 中最右边的第二、三项用柯西-施瓦茨不等式，有：

$$\sum_{i,j} g^{i\bar{j}} \varphi_i (\Delta\varphi)_{\bar{j}} \leq \sqrt{g^{i\bar{j}} \varphi_i \varphi_{\bar{j}}} \sqrt{g^{i\bar{j}} (\Delta\varphi)_i (\Delta\varphi)_{\bar{j}}},$$

完全类似的，有：

$$\sum_{i,j} g^{i\bar{j}} (\Delta\varphi)_i \varphi_{\bar{j}} \leq \sqrt{g^{i\bar{j}} \varphi_i \varphi_{\bar{j}}} \sqrt{g^{i\bar{j}} (\Delta\varphi)_i (\Delta\varphi)_{\bar{j}}},$$

因此，合在一起：

$$\sum_{i,j} g^{i\bar{j}} \varphi_i (\Delta\varphi)_{\bar{j}} + \sum_{i,j} g^{i\bar{j}} (\Delta\varphi)_i \varphi_{\bar{j}} \leq 2 \sqrt{g^{i\bar{j}} \varphi_i \varphi_{\bar{j}}} \sqrt{g^{i\bar{j}} (\Delta\varphi)_i (\Delta\varphi)_{\bar{j}}}. \tag{2.9}$$

为了将 (2.8) 中右边第一项消去，我们用带 ε 的柯西-施瓦茨不等式：

$$2ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{\varepsilon}, \varepsilon > 0.$$

考虑 (2.9) 的右端项，用上述不等式，取

$$a = \sqrt{g^{i\bar{j}} \varphi_i \varphi_{\bar{j}}}, b = \sqrt{g^{i\bar{j}} (\Delta\varphi)_i (\Delta\varphi)_{\bar{j}}}, \varepsilon = C(m + \Delta\varphi),$$

有：

$$\begin{aligned}
& -C \exp\{-C\varphi\} \sum_{i,j} g'^{i\bar{j}} \varphi_i (\Delta\varphi)_{\bar{j}} - C \exp\{-C\varphi\} \sum_{i,j} g'^{i\bar{j}} (\Delta\varphi)_i \varphi_{\bar{j}} \\
& \geq -C \exp\{-C\varphi\} \left(C(m + \Delta\varphi) g'^{i\bar{j}} \varphi_i \varphi_{\bar{j}} + \frac{g'^{i\bar{j}} (\Delta\varphi)_i (\Delta\varphi)_{\bar{i}}}{C(m + \Delta\varphi)} \right) \\
& = -C^2 \exp\{-C\varphi\} \left(g'^{i\bar{j}} \varphi_i \varphi_{\bar{j}} \right) (m + \Delta\varphi) - (m + \Delta\varphi)^{-1} \exp\{-C\varphi\} \sum_{k,j} g'^{i\bar{j}} (\Delta\varphi)_i (\Delta\varphi)_{\bar{j}}.
\end{aligned}$$

代回 (2.8)，即可得到：

$$\begin{aligned}
\Delta'(\exp\{-C\varphi\}(m + \Delta\varphi)) & \geq -(m + \Delta\varphi)^{-1} \exp\{-C\varphi\} \sum_{k,j} g'^{i\bar{j}} (\Delta\varphi)_i (\Delta\varphi)_{\bar{j}} \\
& \quad - C \exp\{-C\varphi\} (\Delta'\varphi) (m + \Delta\varphi) + \exp\{-C\varphi\} \Delta'(\Delta\varphi).
\end{aligned} \tag{2.10}$$

这样变形之后，关于 φ 的三阶项已经具有某些对称性。我们记得由 (2.7)，上式右端最后一项也可化为关于 φ 二阶项、三阶项的表达式，接下来尝试消掉右端的三阶项。这一步也很有技巧性。

如前文所说，在所选取的特殊坐标系中，有 $g'^{i\bar{j}} = \frac{\delta_{ij}}{1 + \varphi_{i\bar{i}}}$ ，又因为 $\Delta\varphi$ 为实值函数，我们有：

$$\sum_i (\Delta\varphi)_i \cdot (\Delta\varphi)_{\bar{i}} = \sum_i |(\Delta\varphi)_i|^2 = \sum_i \left| \sum_k \varphi_{k\bar{k}i} \right|^2. \tag{2.11}$$

因此考虑 (2.10) 右端包含 φ 三阶导数的第一项和最后一项，将 (2.7) 和 (2.11) 代入：

$$\begin{aligned}
& -(m + \Delta\varphi)^{-1} \sum_{i,\bar{i}} g'^{i\bar{j}} (\Delta\varphi)_i (\Delta\varphi)_{\bar{j}} + \Delta'(\Delta\varphi) \\
& \geq -(m + \Delta\varphi)^{-1} \sum_i (1 + \varphi_{i\bar{i}})^{-1} \left| \sum_k \varphi_{k\bar{k}i} \right|^2 \\
& \quad + \Delta F + \sum_{i,j,k} (1 + \varphi_{k\bar{k}})^{-1} (1 + \varphi_{i\bar{i}})^{-1} \varphi_{k\bar{i}\bar{j}} \varphi_{i\bar{k}\bar{j}} \\
& \quad + \sum_{i,l} \left(\inf_{i \neq l} R_{i\bar{i}l\bar{l}} \right) \left[\sum_{i,l} \frac{1 + \varphi_{l\bar{l}}}{1 + \varphi_{i\bar{i}}} - m^2 \right].
\end{aligned} \tag{2.12}$$

我们考虑上式右端第一项，分子分母凑出因子 $(1 + \varphi_{k\bar{k}})^{1/2}$ 之后用柯西-施瓦

茨不等式：

$$\begin{aligned}
& (m + \Delta\varphi)^{-1} \sum_i (1 + \varphi_{i\bar{i}})^{-1} \left| \sum_k \varphi_{k\bar{k}i} \right|^2 \\
&= (m + \Delta\varphi)^{-1} \sum_i (1 + \varphi_{i\bar{i}})^{-1} \left| \sum_k \frac{\varphi_{k\bar{k}i}}{(1 + \varphi_{k\bar{k}})^{1/2}} (1 + \varphi_{k\bar{k}})^{1/2} \right|^2 \\
&\leq (m + \Delta\varphi)^{-1} \left(\sum_{i,k} (1 + \varphi_{i\bar{i}})^{-1} (1 + \varphi_{k\bar{k}})^{-1} \varphi_{k\bar{k}i} \varphi_{\bar{k}k\bar{i}} \right) \left(\sum_k (1 + \varphi_{k\bar{k}}) \right) \\
&= \sum_{i,k} (1 + \varphi_{i\bar{i}})^{-1} (1 + \varphi_{k\bar{k}})^{-1} \varphi_{k\bar{k}i} \varphi_{\bar{k}k\bar{i}} \\
&= \sum_{i,k} (1 + \varphi_{i\bar{i}})^{-1} (1 + \varphi_{k\bar{k}})^{-1} \varphi_{i\bar{k}k} \varphi_{k\bar{i}\bar{k}} \\
&\leq \sum_{i,j,k} (1 + \varphi_{k\bar{k}})^{-1} (1 + \varphi_{i\bar{i}})^{-1} \varphi_{i\bar{k}j} \varphi_{k\bar{i}\bar{j}}.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

因为 $\sum_k (1 + \varphi_{k\bar{k}}) = m + \sum_k \varphi_{k\bar{k}} = m + \Delta\varphi$ ，所以有上式第四行。接着需要用到三阶导数交换求联络次序，规则是：第一、二个指标可以交换次序，对于第二、三个指标，若一个为共轭部分，一个不属于共轭部分，则由 Ricci 恒等式，交换次序后将出现曲率项，除此之外也可以直接交换顺序，即如下等式：

$$\varphi_{k\bar{k}i} = \varphi_{\bar{k}ki} = \varphi_{\bar{k}ik} = \varphi_{i\bar{k}k}, \tag{2.14}$$

以及

$$\varphi_{\bar{k}k\bar{i}} = \varphi_{k\bar{k}\bar{i}} = \varphi_{k\bar{i}\bar{k}}. \tag{2.15}$$

将上述两式 (2.14), (2.15) 代入 (2.13)，即得到其第五行。最后一行中，将原本相同的求和指标 k 放缩为 k, j 分别求和，由内积的正定性即得不等号成立。

再将 (2.13) 代入不等式 (2.12)，我们看到原式中的三阶项恰好被消掉，与未知函数 φ 有关的只剩下二阶项：

$$\begin{aligned}
& -(m + \Delta\varphi)^{-1} \sum_{i,j} g^{i\bar{j}} (\Delta\varphi)_i (\Delta\varphi)_{\bar{j}} + \Delta'(\Delta\varphi) \\
& \geq \Delta F + \left(\inf_{i \neq l} R_{i\bar{i}l\bar{l}} \right) \left[\sum_{i,l} \frac{1 + \varphi_{i\bar{i}}}{1 + \varphi_{l\bar{l}}} - m^2 \right].
\end{aligned} \tag{2.16}$$

将上式 (2.16) 代入 (2.10), 得到:

$$\begin{aligned} \Delta'(\exp\{-C\varphi\}(m + \Delta\varphi)) &\geq \exp\{-C\varphi\} \left[\Delta F + \inf_{i \neq l} (R_{i\bar{i}l}) \left(\sum_{i,l} \frac{1 + \varphi_{i\bar{i}}}{1 + \varphi_{l\bar{l}}} - m^2 \right) \right] \\ &\quad - C \exp\{-C\varphi\} (\Delta'\varphi) (m + \Delta\varphi). \end{aligned} \quad (2.17)$$

继续化简上式: 因为在函数 $\exp\{-C\varphi\}(m + \Delta\varphi)$ 的最大值点处, (2.17) 左端项小于等于 0, 我们要试图将右端项化简为关于 $\Delta\varphi$ 的不等式, 从而得到二阶项的上界估计。

记得在特殊坐标系下, 有:

$$\Delta'\varphi = m - \sum_i \frac{1}{1 + \varphi_{i\bar{i}}}.$$

又因为有如下恒等式:

$$\sum_{i,l} \frac{1 + \varphi_{i\bar{i}}}{1 + \varphi_{l\bar{l}}} = \left(\sum_i \frac{1}{1 + \varphi_{i\bar{i}}} \right) \left(\sum_l (1 + \varphi_{l\bar{l}}) \right) = (m + \Delta\varphi) \left(\sum_i \frac{1}{1 + \varphi_{i\bar{i}}} \right), \quad (2.18)$$

将上式代入 (2.17), 有:

$$\begin{aligned} \Delta'(\exp\{-C\varphi\}(m + \Delta\varphi)) &\geq \exp\{-C\varphi\} \left(\Delta F - m^2 \inf_{i \neq l} (R_{i\bar{i}l}) \right) \\ &\quad + \exp\{-C\varphi\} \inf_{i \neq l} (R_{i\bar{i}l}) \left(\sum_{i,l} \frac{1 + \varphi_{i\bar{i}}}{1 + \varphi_{l\bar{l}}} \right) \\ &\quad - C \exp\{-C\varphi\} m(m + \Delta\varphi) + C \exp\{-C\varphi\} (m + \Delta\varphi) \sum_i \frac{1}{1 + \varphi_{i\bar{i}}} \quad (2.19) \\ &= \exp\{-C\varphi\} \left(\Delta F - m^2 \inf_{i \neq l} (R_{i\bar{i}l}) \right) - C \exp\{-C\varphi\} m(m + \Delta\varphi) \\ &\quad + \left(C + \inf_{i \neq l} (R_{i\bar{i}l}) \right) \exp\{-C\varphi\} (m + \Delta\varphi) \left(\sum_i \frac{1}{1 + \varphi_{i\bar{i}}} \right). \end{aligned}$$

我们还需要将右端项中的 $\sum_i \frac{1}{1 + \varphi_{i\bar{i}}}$ 放缩为与 $m + \Delta\varphi$ 相关的式子, 为此需要如下不等式:

$$\sum_i \frac{1}{1 + \varphi_{i\bar{i}}} \geq \left(\frac{\sum_i (1 + \varphi_{i\bar{i}})}{\prod_i (1 + \varphi_{i\bar{i}})} \right)^{1/(m-1)}. \quad (2.20)$$

首先证明上述不等式, 在两边同时取 $(m-1)$ 次方:

$$\left(\sum_i \frac{1}{1 + \varphi_{i\bar{i}}} \right)^{(m-1)} \geq \frac{\sum_i (1 + \varphi_{i\bar{i}})}{\prod_i (1 + \varphi_{i\bar{i}})}.$$

可以看出左端是从 $\sum_i \frac{1}{1+\varphi_{i\bar{i}}}$ 中任意选取 $m-1$ 项相乘再相加，这样会包含一些重复项，比如 $\left(\frac{1}{1+\varphi_{1\bar{1}}}\right)^{(m-1)}$ ，而右端将求和符号展开，将只包 m 项，每项为指标互不相同的 $m-1$ 个型如 $\frac{1}{1+\varphi_{i\bar{i}}}$ 项的乘积。

因此展开后，右端的任意一项均包含在左端中。又由假设 $g'_{i\bar{j}}$ 正定，即对任意 $i, 1+\varphi_{i\bar{i}} > 0$ 。因此，有不等式 (2.20) 成立。

我们进一步化简 (2.20) 右端。

分子为：

$$\sum_i (1 + \varphi_{i\bar{i}}) = m + \Delta\varphi, \quad (2.21)$$

结合 φ 满足复蒙日-安培方程 (2.1)，在选定坐标系下，方程左端项为对角矩阵，所以：

$$\det \left(g_{i\bar{j}} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} \right) = \prod_i (1 + \varphi_{i\bar{i}}) = \exp\{F\}. \quad (2.22)$$

将上式，(2.21) 代入 (2.20)，得到：

$$\sum_i \frac{1}{1 + \varphi_{i\bar{i}}} \geq (m + \Delta\varphi)^{1/(m-1)} \exp \left\{ \frac{-F}{m-1} \right\}. \quad (2.23)$$

再将上式代入 (2.19)，整理后得到：

$$\begin{aligned} \Delta'(\exp\{-C\varphi\}(m + \Delta\varphi)) &\geq \exp\{-C\varphi\} \left(\Delta F - m^2 \inf_{i \neq l} (R_{i\bar{i}l\bar{l}}) \right) \\ &\quad - C \exp\{-C\varphi\} m(m + \Delta\varphi) \\ &\quad + \left(C + \inf_{i \neq l} (R_{i\bar{i}l\bar{l}}) \right) \exp\{-C\varphi\} \exp \left\{ \frac{-F}{m-1} \right\} (m + \Delta\varphi)^{1+1/(m-1)}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

我们可以选取 C 足够大，使得：

$$C + \inf_{i \neq l} (R_{i\bar{i}l\bar{l}}) > 1. \quad (2.25)$$

这一步保证了 (2.24) 中关于 $m + \Delta\varphi$ 的最高次项系数是正的。

因为 $\exp\{-C\varphi\}(m + \Delta\varphi)$ 在紧流形上一定会在某一点 p 处取到最大值，在最大值点处，拉普拉斯小于等于 0，因此不等式 (2.24) 左端项非正，在这一点处有：

$$\begin{aligned} 0 &\geq \Delta F - m^2 \inf_{i \neq l} (R_{i\bar{i}l\bar{l}}) - C m(m + \Delta\varphi) \\ &\quad + \left(C + \inf_{i \neq l} (R_{i\bar{i}l\bar{l}}) \right) \exp \left\{ \frac{-F}{m-1} \right\} (m + \Delta\varphi)^{1+1/(m-1)}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

记关键项 $m + \Delta\varphi$ 等于 y , 上式可视为一个关于 y 的方程:

$$y^{1+1/(m-1)} \leq ay + b,$$

由此我们可以推出, $y^{1+1/(m-1)} \leq 2ay$ 或者 $y^{1+1/(m-1)} \leq 2b$ 二者至少有一个成立。不管是哪一个不等式成立, 都能得到 y 关于 a, b 的上界估计。

因此, 同样的想法应用到不等式 (2.26), 就得到 $(m + \Delta\varphi)(p)$ 关于 $\sup_M(-\Delta F)$, $\sup_M |\inf_{i \neq l} (R_{i\bar{i}l\bar{l}})|$, $C \cdot m$ 和 $\sup_M F$ 的上界估计, 记为 C_1 , 即:

$$(m + \Delta\varphi)(p) \leq C_1.$$

其中, 常数 C_1 仅与流形 M 本身以及初始凯勒度量有关。

特别注意 (2.23) 中右端项的次数, 在不等式 (2.20) 中自然会想, 能否直接使用均值不等式, 我们将得到:

$$\sum_i \frac{1}{1 + \varphi_{i\bar{i}}} \geq m \sqrt[m]{\prod_i (1 + \varphi_{i\bar{i}})} = m \exp\left\{\frac{F}{m}\right\}. \quad (2.27)$$

若将上式应用于不等式 (2.19), 则同样计算, 我们将得到类似 (2.26) 的不等式:

$$\begin{aligned} 0 &\geq \Delta F - m^2 \inf_{i \neq l} (R_{i\bar{i}l\bar{l}}) - Cm(m + \Delta\varphi) + \left(C + \inf_{i \neq l} (R_{i\bar{i}l\bar{l}})\right) m(m + \Delta\varphi) \exp\left\{\frac{F}{m}\right\} \\ &= \Delta F - m^2 \inf_{i \neq l} (R_{i\bar{i}l\bar{l}}) + \left[\left(C + \inf_{i \neq l} (R_{i\bar{i}l\bar{l}})\right) \exp\left\{\frac{F}{m}\right\} - C\right] m(m + \Delta\varphi) \\ &= \Delta F - m^2 \inf_{i \neq l} (R_{i\bar{i}l\bar{l}}) + \left[\left(\exp\left\{\frac{F}{m}\right\} - 1\right) C + \inf_{i \neq l} R_{i\bar{i}l\bar{l}} \cdot \exp\left\{\frac{F}{m}\right\}\right] m(m + \Delta\varphi) \end{aligned} \quad (2.28)$$

由此看到, 这样并不能保证 (2.28) 中关于 C 系数的符号。因为需要取 C 为正数, 若对任意正数 C , 方括号内关于 C 的一次函数恒为负数, 将无法由此得到 $m + \Delta\varphi$ 的上界估计。所以不等式 (2.20) 是必要且巧妙的。

至此, 我们已经得到 $\exp\{-C\varphi\}(m + \Delta\varphi)$ 在 p 点处取到最大值, 我们想得到 $m + \Delta\varphi$ 不仅在 p 点处, 而在整个流形 M 上的估计, 这依赖于 φ 的整体有界性:

$$\begin{aligned} \exp\{-C\varphi\}(m + \Delta\varphi) &\leq \exp\{-C\varphi(p)\}(m + \Delta\varphi)(p) \\ &= \exp\{-C\varphi(p)\} \cdot C_1 \\ &\leq C_1 \cdot \sup_M \exp\{-C\varphi\} \\ &= C_1 \cdot \exp\{-C \inf_M \varphi\}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

因此, 将上式移项, 并由 Hermitian 度量的正定性, 即得到 φ 仅依赖于 φ 本身下界估计的二阶估计:

$$0 < m + \Delta\varphi \leq C_1 \exp\left\{C \left(\varphi - \inf_M \varphi\right)\right\}. \quad (2.30)$$

2.2 解的 C^0 估计

本节中，首先利用格林函数的性质，给出 φ 的积分估计，即 L^1 范数估计。如果我们有了 φ 的 L^1 估计和二阶估计，可以由椭圆方程的 Schauder 理论给出 φ 的一阶估计。因此 φ 的一阶、二阶估计最终都归结为零阶估计。给出 φ 的 C^0 估计，这也是丘成桐论文中最关键的地方。

首先，用格林函数，可以快速给出 φ 的上界估计以及 L^1 估计。

记 $G(p, q)$ 为拉普拉斯算子在紧流形 M 上的格林函数，经典的 PDE 理论保证了存在唯一性，可以参考 [Li12]，第 17 章。

我们总可以找到一个仅依赖于流形 M 的常数 K ，使得：

$$G(p, q) + K \geq 0.$$

因为流形 M 为紧流形，不需要考虑边界项，又对 φ 有一定正则性假设，由格林公式可以得到：

$$\begin{aligned}\varphi(p) &= - \int_M G(p, q) \Delta \varphi(q) dq \\ &= - \int_M (G(p, q) + K) \Delta \varphi(q) dq.\end{aligned}\tag{2.31}$$

上式最后是由于在紧流形上分部积分，可知，对一个函数求拉普拉斯后再积分恒为 0，所以不妨添加一个常数，以便确定符号。

由于 $m + \Delta \varphi > 0$ ，即 $-\Delta \varphi < m$ ，代入上式，有：

$$\sup_M \varphi \leq m \sup_{p \in M} \int_M (G(p, q) + K) dq.\tag{2.32}$$

所以我们只需要依赖格林函数的估计，便得到 φ 的上界估计。为了得到 $\sup_M |\varphi|$ 的估计，还需要控制 φ 的下界，即给出 $\inf_M \varphi$ 的估计。

由上式以及我们的假设 $\int_M \varphi = 0$ ，用三角不等式，可得：

$$\begin{aligned}\int_M |\varphi| &= \int_M \left| \sup_M \varphi - \varphi - \sup_M \varphi \right| \leq \int_M \left| \sup_M \varphi - \varphi \right| + \int_M \left| \sup_M \varphi \right| \\ &= \left(\sup_M \varphi \right) \text{Vol}(M) - \int_M \varphi + \left(\sup_M \varphi \right) \text{Vol}(M) \\ &= 2m \text{Vol}(M) \sup_{p \in M} \int_M (G(p, q) + K) dq.\end{aligned}\tag{2.33}$$

上式中第二行是因为显然有 $\sup_M \varphi \geq \varphi$ ，所以 $\sup_M \varphi - \varphi \geq 0$ ，以及由假设 $\int_M \varphi = 0$ ，必然存在点 x ，使得 $\sup_M \varphi \geq \varphi(x) \geq 0$ ，所以绝对值均可以去掉。

为了给出 $\sup_M |\varphi|$ 的估计, 我们还需要对 φ 的下界, 即 $\inf_M \varphi$ 进行估计。丘成桐的论文中按流形维数 m 是否等于 2 给出了不同的估计方法, 先给出 $m = 2$ 的估计, 接着给出对任意维数都适用的估计。

首先假设 $m = 2$, 因为已经有了 $\sup_M \varphi$ 的估计, 可以首先确定 φ 的符号。因为要估计下界, 不妨取 φ 恒为负数, 为此可以取新的 $\tilde{\varphi}$ 与原先仅差一个常数:

$$\tilde{\varphi} = \varphi - 1 - m \sup_{p \in M} \int_M (G(p, q) + K) dq.$$

用 $\tilde{\varphi}$ 代替 φ , 并且为方便起见, 仍记为 φ .

由三角不等式和流形 M 的紧性, 我们仍有 L^1 估计, 即 $\int_M |\varphi|$ 仍有估计。并且 $\sup_M \varphi \leq -1$.

求 C^0 估计的想法是, 首先考虑积分 $\int_M \exp\{k\varphi^2\}$ 的上界估计, 其中 k 为满足一定条件的正常数。若上界估计存在, 再在一定测地球内放缩, 使得测地球的半径与 $\inf_M \varphi$ 有关, 而 $\exp\{k\varphi^2\}$ 在测地球之内有下界, 我们就可以通过解不等式方程, 得到 $\inf_M \varphi$ 的估计。

为了给出 $\int_M \exp\{k\varphi^2\}$ 的上界估计, 考虑 $\exp\{k\varphi^2\}$ 关于 φ 的泰勒展开:

$$\exp\{k\varphi^2\} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{k^p}{p!} \varphi^{2p}.$$

因为上述收敛的收敛半径为 ∞ , 即泰勒级数一致收敛到 $\exp\{k\varphi^2\}$, 因此可以逐项积分, 有:

$$\int_M \exp\{k\varphi^2\} \leq \sum_{p=0}^{\infty} \frac{k^p}{p!} \int_M |\varphi|^{2p}. \quad (2.34)$$

所以要对任意正整数 p , 给出 $\int_M |\varphi|^{2p}$ 的上界估计。特殊的, $p = 0$ 时, 显然有 $\int_M 1 = \text{Vol}(M)$.

首先, 按定义计算, 假设 $f \in C^2(\mathbb{R}), g \in C^2(M; \mathbb{R})$, 我们有如下复合函数求拉普拉斯的公式:

$$\Delta f(g) = f' \Delta g + f'' |\nabla g|^2. \quad (2.35)$$

因此, 对于任意给定的 $p \geq 1$ (注意这里不要求 p 为整数), 将 $f(x) = x^p, g = -\varphi$

代入上式，并且注意这里用关于度量 g' 的拉普拉斯算子和内积，有：

$$\begin{aligned}
\Delta'(-\varphi)^p &= -p(-\varphi)^{p-1}\Delta'\varphi + p(p-1)(-\varphi)^{p-2}g'^{i\bar{j}}\varphi_i\varphi_{\bar{j}} \\
&= -p(-\varphi)^{p-1}\Delta'\varphi + p(p-1)(-\varphi)^{p-2}\sum_i \frac{|\varphi_i|^2}{1+\varphi_{i\bar{i}}} \\
&= -p(-\varphi)^{p-1}\left(m - \sum_i \frac{1}{1+\varphi_{i\bar{i}}}\right) + p(p-1)(-\varphi)^{p-2}\sum_i \frac{|\varphi_i|^2}{1+\varphi_{i\bar{i}}}.
\end{aligned}$$

现在由假设 $m = 2$ ，将求和符号写开，有：

$$\begin{aligned}
\Delta'(-\varphi)^p &= p(p-1)(-\varphi)^{p-2}\sum_i \frac{|\varphi_i|^2}{1+\varphi_{i\bar{i}}} \\
&\quad - 2p(-\varphi)^{p-1} + p(-\varphi)^{p-1}(1+\varphi_{1\bar{1}})^{-1}(1+\varphi_{2\bar{2}})^{-1}(2+\Delta\varphi) \\
&= p(p-1)(-\varphi)^{p-2}\sum_i \frac{|\varphi_i|^2}{1+\varphi_{i\bar{i}}} - 2p(-\varphi)^{p-1} \\
&\quad + 2p(-\varphi)^{p-1}\exp\{-F\} \\
&\quad + \exp\{-F\}[-\Delta(-\varphi)^p + p(p-1)(-\varphi)^{p-2}|\nabla\varphi|^2].
\end{aligned} \tag{2.36}$$

上式中第二行用到：

$$\begin{aligned}
(1+\varphi_{1\bar{1}})^{-1}(1+\varphi_{2\bar{2}})^{-1}(2+\Delta\varphi) &= \frac{(1+\varphi_{1\bar{1}}) + (1+\varphi_{2\bar{2}})}{(1+\varphi_{1\bar{1}})(1+\varphi_{2\bar{2}})} \\
&= \frac{1}{1+\varphi_{1\bar{1}}} + \frac{1}{1+\varphi_{2\bar{2}}}.
\end{aligned}$$

式 (2.36) 的最后一行，用到 $\exp\{F\} = (1+\varphi_{1\bar{1}})(1+\varphi_{2\bar{2}})$ 和复合函数的拉普拉斯公式。

接着，将 (2.36) 两端同乘 $\exp\{F\}$ 并关于原始度量 $g = \sum_{i,j} g_{i\bar{j}} dz^i \otimes d\bar{z}^j$ 的体积形式积分，首先左端由复蒙日-安培方程 (2.1) 以及函数的拉普拉斯积分得 0，我们有：

$$\int_M \exp\{F\} \Delta'(-\varphi)^p \omega_g^m = \int_M \Delta'(-\varphi)^p \omega_{g'}^m = 0.$$

这里 ω_g 表示关于度量 g 的体积形式，此时 (2.1) 等价于：

$$\omega_{g'}^m = \exp\{F\} \omega_g^m.$$

移项化简，得到：

$$\begin{aligned}
2p \int_M (-\varphi)^{p-1}(1 - \exp\{F\}) &= p(p-1) \int_M (-\varphi)^{p-2} \left(\sum_i \frac{|\varphi_i|^2}{1+\varphi_{i\bar{i}}} \right) \exp\{F\} \\
&\quad - \int_M \Delta(-\varphi)^p + p(p-1) \int_M (-\varphi)^{p-2} |\nabla\varphi|^2.
\end{aligned} \tag{2.37}$$

上式右端第二项为 0，并且我们有：

$$\begin{aligned} |\nabla(-\varphi)^{p/2}|^2 &= g(\nabla(-\varphi)^{p/2}, \nabla(-\varphi)^{p/2}) = \sum_i \frac{\partial}{\partial z^i}(-\varphi)^{p/2} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{z}^i}(-\varphi)^{p/2} \\ &= \frac{p^2}{4}(-\varphi)^{p-2}|\nabla\varphi|^2. \end{aligned}$$

因此：

$$\begin{aligned} 2p \int_M (-\varphi)^{p-1}(1 - \exp\{F\}) &= p(p-1) \int_M (-\varphi)^{p-2} \left(\sum_i \frac{|\varphi_i|^2}{1 + \varphi_{i\bar{i}}} \right) \exp\{F\} \\ &\quad + \frac{4(p-1)}{p} \int_M |\nabla(-\varphi)^{p/2}|^2. \end{aligned} \quad (2.38)$$

记得我们最初平移 φ 使得恒小于等于 0，这允许我们放缩掉上式右端第一项，因为其大于等于 0。即：

$$\int_M |\nabla(-\varphi)^{p/2}|^2 \leq \frac{p^2}{2(p-1)} \int_M (-\varphi)^{p-1}(1 - \exp\{F\}). \quad (2.39)$$

我们记 $C_2 = \sup_M(1 - \exp\{F\})$ 。当 $p \geq 2$ 时，有：

$$\frac{p}{2(p-1)} \leq 1.$$

因此，由 (2.39)，得到：

$$\begin{aligned} \int_M |\nabla(-\varphi)^{p/2}|^2 &\leq \frac{p^2}{2(p-1)} \left| \int_M (1 - \exp\{F\})(-\varphi)^{p-1} \right| \\ &\leq pC_2 \int_M |\varphi|^{p-1}. \end{aligned} \quad (2.40)$$

记得我们的目标是给出 $\int_M |\varphi|^{2p}$ 对任意正整数 p 的上界估计。

接着将要使用 Sobolev 不等式，参考 [Eva10]：假设 $u \in W^{1,p}(\Omega)$ ，其中 $\Omega \in \mathbb{R}^n$ ，为欧式空间中有界开集，当 $n > p$ 时，记 $1/p^* = 1/p - 1/n$ ，则有：

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C(\Omega, n, p) \|\nabla u\|_{W^{1,r}(\Omega)}.$$

因为考虑的都是紧致无边的流形 M ，我们总可以将它分为有限个开集，每一块都微分同胚于欧氏空间中的有界开集，因此在整个流形 M 上也有 Sobolev 不等式，即对于任意函数 $f \in W^{1,r}$ ， $r < \dim_{\mathbb{R}}(M)$ ，我们有：

$$\|f\|_{L^{r^*}(M)} \leq C(\|f\|_{L^r(M)} + \|\nabla f\|_{L^r(M)}).$$

其中常数 C 仅依赖于流形 M 。

此时流形复维数 $m = 2$, 实维数 $n = 4$, 取 $r = 2, r^* = 4$, $f = |\varphi|^{\frac{p}{2}}$, 即有:

$$\left(\int_M |\varphi|^{2p}\right)^{1/4} \leq C \left(\left(\int_M |\varphi|^p\right)^{1/2} + \left(\int_M |\nabla(-\varphi)^{p/2}|^2\right)^{1/2} \right). \quad (2.41)$$

因为按假设, 在流形 M 上 φ 恒小于 0. 将上式两边平方, 再对交叉项用基本不等式, 最后将 (2.40) 代入, 即可得到存在仅依赖于流形 M 的常数 $C_3 = 2C^2$, 使得:

$$\begin{aligned} \left(\int_M |\varphi|^{2p}\right)^{1/2} &\leq C^2 \left(\int_M |\varphi|^p + \int_M |\nabla(-\varphi)^{p/2}|^2 + 2 \left(\int_M |\varphi|^p\right)^{1/2} \cdot \left(\int_M |\nabla(-\varphi)^{p/2}|^2\right)^{1/2} \right) \\ &\leq 2C^2 \left(\int_M |\varphi|^p + \int_M |\nabla(-\varphi)^{p/2}|^2 \right) \\ &= C_3 \int_M |\varphi|^p + C_3 \int_M |\nabla(-\varphi)^{p/2}|^2 \\ &\leq C_3 \int_M |\varphi|^p + pC_2C_3 \int_M |\varphi|^{p-1}. \end{aligned} \quad (2.42)$$

由于 $\varphi \leq -1, |\varphi| \geq 1$, 因此有 $|\varphi|^{p-1} \leq |\varphi|^p$, 所以我们可以对上式最后一行第二项放缩:

$$\int_M |\varphi|^{2p} \leq \left(C_3 \int_M |\varphi|^p + pC_2C_3 \int_M |\varphi|^{p-1} \right)^2 \leq (C_3 + pC_2C_3)^2 \left(\int_M |\varphi|^p \right)^2.$$

因此, 我们可以找到一个仅依赖于流形 M 的常数 C_4 使得:

$$\int_M |\varphi|^{2p} \leq C_4 p^2 \left(\int_M |\varphi|^p \right)^2. \quad (2.43)$$

接着我们需要用到庞加莱不等式, 同样参考 [Eva10]:

记 $u \in W^{1,r}(M)$, $\bar{u} = \frac{1}{\text{vol}(M)} \int_M u$, 为函数 u 在流形上的平均值, 则我们有:

$$\int_M (u - \bar{u})^r \leq C_P \int_M |\nabla u|^r,$$

其中 C_P 为仅依赖于流形 M 的庞加莱常数。

由假设 $\int_M \varphi = 0$, 所以取 $r = 2$ 时, 庞加莱不等式变为 $\int_M |\varphi|^2 \leq C \int_M |\nabla \varphi|^2$, 其中 C 为仅依赖于流形 M 的常数. 再由 (2.40), 有:

$$\int_M |\varphi|^2 = \int_M (-\varphi)^2 \leq C \int_M |\nabla(-\varphi)|^2 \leq 2CC_2 \int_M |\varphi|. \quad (2.44)$$

因为之前已经得到 φ 的 L^1 估计, 所以从上式可得出 φ 的 L^2 估计。

接下来我们证明，对任意整数 $p \geq 1$ ，可以找到仅依赖于流形 M 的常数 C_5 ，以下不等式成立：

$$\int_M |\varphi|^p \leq C_5^p \left(\frac{p}{2}\right)^{p/2}. \quad (2.45)$$

记 p_0 为第一个整数，使得对任意的 $p \geq p_0$ ，有：

$$C_4(1 + \text{Vol } M) \left(\frac{p+2}{4}\right)^{(p+1)/2} \leq \left(\frac{p+1}{2}\right)^{(p-3)/2}, \quad (2.46)$$

这是因为将上式含 p 的部分移项至右边，我们有：

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{p+1}{2}\right)^{(p-3)/2}}{\left(\frac{p+2}{4}\right)^{(p+1)/2}} = \lim_{p \rightarrow \infty} e^{-1/2} \left(1 - \frac{1}{p+2}\right)^{-5/2} \cdot 2^{\frac{p+5}{2}} \cdot \frac{1}{(p+2)^2} = +\infty. \quad (2.47)$$

上式中前两项趋于常数 $e^{-1/2}$ ，后两项趋于 $+\infty$ ，因此极限等于 $+\infty$ 。

另一方面，由于我们之前已经得到 $\|\varphi\|_{L^1}, \|\varphi\|_{L^2}$ 的估计，为了得到更高阶 $\|\varphi\|_{L^p}$ 的估计，只需要反复使用 Hölder 不等式，假设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n, f \in L^p(\Omega), g \in L^q(\Omega), \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, 1 \leq p, q \leq \infty$ ，我们有：

$$\int_{\Omega} |fg| dx \leq \|f\|^p \cdot \|f\|^p. \quad (2.48)$$

应用上述不等式，以及 (2.43)，我们可得到任意 $\|\varphi\|_{L^p}$ 的估计。

例如我们考虑一个具体的范数：

$\|\varphi\|_{L^5}$ 的估计，由 Hölder 不等式：

$$\int_M |\varphi|^5 = \int_M |\varphi|^2 \cdot |\varphi|^3 \leq \left(\int_M |\varphi|^4\right)^{1/2} \cdot \left(\int_M |\varphi|^6\right)^{1/2},$$

再次使用式 (2.43) 与 Hölder 不等式，我们即可得到 $\|\varphi\|_{L^5}$ 仅依赖于 $\|\varphi\|_{L^1}, \|\varphi\|_{L^2}$ 的估计。

还需要证明此估计关于 p 的增长阶数。

有上述具体例子做参考，我们可以先在此描述思路：

我们需要用 φ 的低阶积分范数，控制高阶积分范数，其中发挥关键作用的是式 (2.43)。

按 $p+1$ 的奇偶性分类讨论，很快便可以得到结果：

首先，我们可以取充分大的 C_5 ，使得对 $1 \leq p \leq 2p_0$ 这有限项都有 (2.45) 成立。接着用数学归纳法，证明 (2.55) 式对任意 $p \geq 1$ 都成立。若 $p+1$ 是偶数，则

先应用 (2.43), 再由归纳假设, 应用 (2.45), 有:

$$\begin{aligned}
\int_M |\varphi|^{p+1} &\leq C_4 \left(\frac{p+1}{2} \right)^2 \left(\int_M |\varphi|^{(p+1)/2} \right)^2 \\
&\leq C_4 \left(\frac{p+1}{2} \right)^2 \left(C_5^{(p+1)/2} \left(\frac{p+1}{4} \right)^{(p+1)/4} \right)^2 \\
&= C_4 \left(\frac{p+1}{2} \right)^2 C_5^{p+1} \left(\frac{p+1}{4} \right)^{(p+1)/2}.
\end{aligned} \tag{2.49}$$

我们应用 (2.46) 放缩上式:

$$\begin{aligned}
\int_M |\varphi|^{p+1} &\leq C_4 \left(\frac{p+1}{2} \right)^2 C_5^{p+1} \left(\frac{p+1}{4} \right)^{(p+1)/2} \\
&\leq \left(\frac{p+1}{2} \right)^2 \cdot C_4 \left(\frac{p+2}{4} \right)^{(p+1)/2} \cdot C_5^{p+1} \\
&\leq \left(\frac{p+1}{2} \right)^2 \cdot \frac{1}{(1 + \text{Vol}(M))} \left(\frac{p+1}{2} \right)^{(p-3)/2} \cdot C_5^{p+1} \\
&\leq C_5^{p+1} \left(\frac{p+1}{2} \right)^{(p+1)/2}.
\end{aligned} \tag{2.50}$$

即证明了用 $p+1$ 代替 p 时, 仍有 (2.45) 成立。

若 $p+1$ 为奇数, 我们首先还是用 (2.43), 将 φ 的积分阶数降低, 再用 Hölder 不等式把 $|\varphi|^{(p+1)/2}$ 放缩为 $|\varphi|^{(p+1)/2}$, 这样我们就仍然可以使用 (2.45) 的归纳假设, 具体操作如下:

$$\begin{aligned}
\int_M |\varphi|^{p+1} &\leq C_4 \left(\frac{p+1}{2} \right)^2 \left(\int_M |\varphi|^{(p+1)/2} \right)^2 \\
&\leq C_4 \left(\frac{p+1}{2} \right)^2 \left(\int_M |\varphi|^{(p+1)/2} \cdot 1 \right)^2 \\
&\leq C_4 \left(\frac{p+1}{2} \right)^2 \left(\left(\int_M \left(|\varphi|^{\frac{p+1}{2}} \right)^{\frac{p+2}{p+1}} \right)^{\frac{p+1}{p+2}} \cdot \left(\int_M 1^{p+2} \right)^{\frac{1}{p+2}} \right)^2 \\
&= C_4 \left(\frac{p+1}{2} \right)^2 \left[\int_M |\varphi|^{(p+2)/2} \right]^{2(p+1)/(p+2)} \text{Vol}(M)^{2/(p+2)} \\
&\leq C_4 \left(\frac{p+1}{2} \right)^2 C_5^{p+1} \left(\frac{p+2}{4} \right)^{(p+1)/2} \text{Vol}(M)^{2/(p+2)}.
\end{aligned} \tag{2.51}$$

上式中第三行, 在 Hölder 不等式中两个指标分别取为 $\frac{p+2}{p+1}, p+2$, 满足:

$$\frac{p+1}{p+2} + \frac{1}{p+2} = 1.$$

因此我们证明了，当 $p+1$ 为奇数时，仍有 (2.45) 成立。

所以存在充分大的常数 C_5 ，使得对任意正整数 $p \geq 1$ ，(2.45) 恒成立。

所以由之前的想法，我们可以将估计 (2.45) 应用于 (2.34)，有：

$$\begin{aligned} \int_M \exp \{k\varphi^2\} &\leq \sum_{p=0}^{\infty} \frac{k^p}{p!} \int_M |\varphi|^{2p} \\ &\leq \sum_{p=0}^{\infty} \frac{k^p}{p!} (C_5^2)^p p^p. \end{aligned} \quad (2.52)$$

由 Stirling 公式，对任意正整数 p ，有：

$$p! \geq \sqrt{2\pi p} p^{p+1/2} e^{-p}. \quad (2.53)$$

将上式代入 (2.52)，我们得到：

$$\begin{aligned} \int_M \exp \{k\varphi^2\} &\leq \sum_{p=0}^{\infty} \frac{k^p}{\sqrt{2\pi p} p^{p+1/2} e^{-p}} (C_5^2)^p p^p \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} (2\pi)^{-1/2} (kC_5^2 e)^p p^{-1/2}. \end{aligned} \quad (2.54)$$

记 $a := kC_5^2 e$ ，我们考虑如下级数的收敛性：

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{a^p}{p^{1/2}}.$$

由比值判别法：

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \left| \frac{a^{p+1}}{(p+1)^{1/2}} / \frac{a^p}{p^{1/2}} \right| = a.$$

我们取特殊的 k ，使得 $k < C_5^{-2} e^{-1}$ ，即 $a < 1$ ，所以我们有 (2.54) 右端级数收敛，因此我们得到了 $\int_M \exp \{k\varphi^2\}$ 的估计。

接下来我们给出 $\sup_M |\varphi|$ 的估计：记 $\Delta\varphi = f$ ，则由式 (2.30) 得到：

$$-m \leq f \leq C_1 \exp\{C \sup \varphi\} \exp\left\{-\inf_M \varphi\right\}.$$

其中 C_1, C 均为确定的正常数。

由 Schauder 估计，参考 [Mor66], p.156(5.5.23).

可知，存在仅依赖于流形 M 和 $C_1 \exp\{C \sup \varphi\}$ 的常数 C_6 ，满足：

$$\sup_M |\nabla\varphi| \leq C_6 \left(\exp\{-C \inf \varphi\} + \int_M |\varphi| \right). \quad (2.55)$$

结合之前 (2.32), (2.33), 对 $\|\varphi\|_{L^1}$ 和 $\sup_M \varphi$ 的估计, 放缩上式右端项, 我们可以找到仅依赖于流形 M 和 C 的常数 C_7 , 使得:

$$\sup_M |\nabla \varphi| \leq C_7 (\exp\{-C \inf \varphi\} + 1).$$

如前文所叙述, 我们考虑特定的测地球:

记 q 为流形 M 上的点, 满足: $\varphi(q) = \inf_M \varphi$, 考虑球心为 q , 半径为 $r = -\frac{1}{2}(\inf \varphi)C_7^{-1}(\exp\{-C \inf \varphi\} + 1)^{-1}$ 的测地球, 由假设, $-\inf_M \varphi$ 为一个很大的正数, 否则自然有 $\inf_M \varphi$ 的估计。因此可以假设此测地球全在 q 点的单射半径之内, 再由微分中值定理, 由于对 $\nabla \varphi$ 已经有估计, 所以在这个球内恒有 $\varphi \leq \frac{1}{2} \inf_M \varphi$.

我们已经得到 $\int_M \exp\{k\varphi^2\}$ 的上界估计, 考虑将它再往小放缩, 在流形 M 的任意一点处, 有:

$$\exp\{k\varphi^2\} \geq \exp\left\{k\left(\frac{1}{2} \inf_M \varphi\right)^2\right\}.$$

因此有:

$$\int_{B(q,r)} \exp\{k\varphi^2\} \geq C_8 \exp\left\{\frac{1}{4}k(-\inf \varphi)^2\right\} \left(-\frac{1}{2} \inf \varphi\right)^{2m} C_7^{-2m} (\exp\{-C \inf \varphi\} + 1)^{-2m}, \quad (2.56)$$

其中 C_8 为一个仅依赖于 M 的正常数。

因为上式的右端项可以视为关于 $-\inf_M \varphi$ 递增的函数, 并且在无穷远处将递增到 $+\infty$, 而我们现在又知道它有上界, 所以 $\inf_M \varphi$ 也必然有界。结合 $\sup_M \varphi$ 的估计, 我们得到了当 $m = 2$ 时, $\sup_M |\varphi|$ 的估计。

接下来我们不假设 $m = 2$, 对一般维数, 给出 $\inf_M \varphi$ 的估计。

假设 N 是任意一个正整数, 由 (2.19), 为了区分, 将那里的 C 全部用 N 替换, 得到:

$$\begin{aligned} \Delta'(\exp\{-N\varphi\}(m + \Delta\varphi)) &\geq \exp\{-N\varphi\} \left(\Delta F - m^2 \inf_{i \neq l} (R_{i\bar{i}l\bar{l}}) \right) \\ &\quad - N \exp\{-N\varphi\} m(m + \Delta\varphi) \\ &\quad + \left(N + \inf_{i \neq l} (R_{i\bar{i}l\bar{l}}) \right) \exp\{-N\varphi\} (m + \Delta\varphi) \left(\sum_i \frac{1}{1 + \varphi_{i\bar{i}}} \right). \end{aligned} \quad (2.57)$$

类似前文, 为了确定符号以及之后的估计需要, 选取 N 足够大, 使得:

$$N + \inf_{i \neq l} (R_{i\bar{i}l\bar{l}}) \geq \frac{1}{2}N. \quad (2.58)$$

由上式以及之前使用特殊不等式得到的结论 (2.23), 在其左端乘

$$\left(N + \inf_{i \neq l} (R_{i\bar{i}l\bar{l}})\right) (m + \Delta\varphi),$$

可得:

$$\left(N + \inf_{i \neq l} (R_{i\bar{i}l\bar{l}})\right) (m + \Delta\varphi) \left(\sum_i \frac{1}{1 + \varphi_{i\bar{i}}}\right) \geq \frac{1}{2} N \exp\left\{\frac{-F}{m-1}\right\} (m + \Delta\varphi)^{1+\frac{1}{m-1}}. \quad (2.59)$$

又因为当 $x \in \mathbb{R}$ 有正下界时, 存在常数 c , 使得:

$$x^{1+\frac{1}{m-1}} - x \geq c.$$

利用上述不等式, 以及凯勒度量的正定性, 将 $m + \Delta\varphi$ 代入 x , 可知存在仅依赖于 $\sup F$ 和 m 的常数 C_9 , 满足:

$$\frac{1}{2} N \exp\left\{\frac{-F}{m-1}\right\} (m + \Delta\varphi)^{m/(m-1)} \geq 2Nm(m + \Delta\varphi) - NC_9. \quad (2.60)$$

将 (2.58), (2.59), (2.72) 代入 (2.57), 即得到:

$$\begin{aligned} \Delta'(\exp\{-N\varphi\}(m + \Delta\varphi)) &\geq \exp\{-N\varphi\} \left(\Delta F - m^2 \inf_{i \neq l} (R_{i\bar{i}l\bar{l}})\right) \\ &\quad - N \exp\{-N\varphi\} m(m + \Delta\varphi) \\ &\quad + \frac{1}{2} N \exp\left\{\frac{-F}{m-1}\right\} (m + \Delta\varphi)^{\frac{m}{m-1}} \exp\{-N\varphi\} \\ &\geq \exp\{-N\varphi\} \left(\Delta F - m^2 \inf_{i \neq l} (R_{i\bar{i}l\bar{l}}) - NC_9\right) \\ &\quad + N \exp\{-N\varphi\} m(m + \Delta\varphi). \end{aligned}$$

将上式两边同乘 $\exp\{F\}$ 放缩, 并且把最后一行第二项中 $m + \Delta\varphi$ 的括号打开, 有:

$$\begin{aligned} \exp\{F\} \Delta'(\exp\{-N\varphi\}(m + \Delta\varphi)) &\geq \exp\{-N\varphi\} \exp\{F\} \left(\Delta F - m^2 \inf_{i \neq l} (R_{i\bar{i}l\bar{l}}) - NC_9\right) \\ &\quad + N \exp\{-N\varphi\} \exp\{\inf F\} m(m + \Delta\varphi) \\ &= \exp\{-N\varphi\} \left\{ \exp\{F\} \left(\Delta F - m^2 \inf_{i \neq l} (R_{i\bar{i}l\bar{l}}) - NC_9\right) + m^2 N \exp\{\inf F\} \right\} \\ &\quad + mN \exp\{\inf F\} \exp\{-N\varphi\} \Delta\varphi. \end{aligned} \quad (2.61)$$

我们再计算复合函数 $\exp\{-N\varphi\}$ 的拉普拉斯:

$$\Delta \exp\{-N\varphi\} = -N \exp\{-N\varphi\} \Delta\varphi + N^2 \exp\{-N\varphi\} |\nabla\varphi|^2.$$

将上式右端第一项代入 (2.61) 右端最后一项：

$$\begin{aligned} & \exp\{F\}\Delta'(\exp\{-N\varphi\}(m + \Delta\varphi)) \\ & \geq \exp\{-N\varphi\} \left\{ \exp\{F\} \left(\Delta F - m^2 \inf_{i \neq l} (R_{i\bar{i}l\bar{l}}) - NC_9 \right) + m^2 N \exp\{\inf F\} \right\} \\ & \quad + m \exp\{\inf F\} (-\Delta \exp\{-N\varphi\} + N^2 \exp\{-N\varphi\} |\nabla\varphi|^2). \end{aligned}$$

上式右端花括号内式子在紧流形 M 上有下界，记为 $-C_{10}$ ，它仅依赖于 N, F 和流形 M ：

$$\begin{aligned} & \exp\{F\}\Delta'(\exp\{-N\varphi\}(m + \Delta\varphi)) \\ & \geq -C_{10} \exp\{-N\varphi\} + m \exp\{\inf F\} (-\Delta \exp\{-N\varphi\} + N^2 \exp\{-N\varphi\} |\nabla\varphi|^2). \end{aligned}$$

将上式两边同时关于初始度量的体积形式 ω_g^m 积分，并用复蒙日-安培方程 $\omega_{g'}^m = \exp\{F\}\omega_g^m$ ，得到左端以及右端第二项积分均等于 0，再两端同乘 $\frac{1}{4}$ ，有：

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} N^2 \int_M \exp\{-N\varphi\} |\nabla\varphi|^2 &= \int_M \left| \nabla \exp \left\{ -\frac{1}{2} N\varphi \right\} \right|^2 \\ &\leq \frac{1}{4} C_{10} m^{-1} \exp\{-\inf F\} \int_M \exp\{-N\varphi\}. \end{aligned} \quad (2.62)$$

有了这些准备工作，接下来，我们目标是给出 $\int_M \exp\{-N\varphi\}$ 的上界估计。

用反证法，假设 $\int_M \exp\{-N\varphi\} = +\infty$ ，由于 φ 本身的正则性假设，由 Sobolev 逼近定理 [Eva10]，可知存在一系列 $\{\varphi_i\}$ 依 $H^1(M)$ 范数收敛到 φ ，其中每一项都满足 (2.33) 中的 L^1 估计和上式，但其积分的极限无界：

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_M \exp\{-N\varphi_i\} = \infty.$$

我们定义：

$$\exp\{-N\tilde{\varphi}_i\} := \frac{\exp\{-N\varphi_i\}}{\int_M \exp\{-N\varphi_i\}}. \quad (2.63)$$

以及：

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}N\tilde{\varphi}_i\right\} := \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}N\varphi_i\right\}}{\left(\int_M \exp\{-N\varphi_i\}\right)^{\frac{1}{2}}}. \quad (2.64)$$

特别的，我们可以算出：

$$\int_M \left| \nabla \exp \left\{ -\frac{1}{2} N\tilde{\varphi}_i \right\} \right|^2 = \frac{\int_M \left| \nabla \exp \left\{ -\frac{1}{2} N\varphi_i \right\} \right|^2}{\int_M \exp\{-N\varphi_i\}}.$$

因此由 (2.62) 可知：

$$\int_M \left| \nabla \exp \left\{ -\frac{1}{2} N\tilde{\varphi}_i \right\} \right|^2 \leq \frac{1}{4} C_{10} m^{-1} \exp\{-\inf F\}. \quad (2.65)$$

从上式中我们知道, $\int_M |\nabla \exp \{-\frac{1}{2}N\tilde{\varphi}_i\}|^2$ 具有一致上界, 且其上界仅依赖于常数 N, F 和流形 M 本身。

由 Sobolev 嵌入定理 [Eva10], 我们知道 $H^1(M) \subset\subset L^2(M)$ 为紧嵌入, 即对任意 $H^1(M)$ 中的有界序列, 都存在一个在 $L^2(M)$ 范数下收敛的子列, 并且极限函数仍然属于 $L^2(M)$ 。

由定义 (2.64) 我们有:

$$\int_M \left| \exp \left\{ -\frac{1}{2}N\tilde{\varphi}_i \right\} \right|^2 = \frac{\int_M \exp \left\{ -\frac{1}{2}N\varphi_i \cdot 2 \right\}}{\int_M \exp \{-N\varphi_i\}} = 1. \quad (2.66)$$

因此, 我们考虑序列 $\{\exp \{-\frac{1}{2}N\tilde{\varphi}_i\}\}$, 由 (2.65) 和 (2.66) 知该序列为 $H^1(M)$ 中的有界序列, 因此存在子列, 依 $L^2(M)$ 范数收敛, 并且收敛到的极限仍然属于 $L^2(M)$ 中的某个函数 f , 不妨记这个子列为 $\{\exp \{-\frac{1}{2}N\tilde{\varphi}_i\}\}$ 本身。

另一方面, 对任意 $\lambda > 0$, 有:

$$\begin{aligned} \int_M |\varphi| &= \int_{\{x \mid |\varphi(x)| \geq \lambda\}} |\varphi| + \int_{\{x \mid |\varphi(x)| < \lambda\}} |\varphi| \\ &\geq \lambda \text{Vol}\{x \mid |\varphi(x)| \geq \lambda\}. \end{aligned}$$

由上式可得:

$$\text{Vol}\{x \mid |\varphi|(x) \geq \lambda\} \leq \frac{1}{\lambda} \int_M |\varphi|. \quad (2.67)$$

进一步, 我们可以按定义 (2.64) 将 $\exp\{-\frac{1}{2}N\tilde{\varphi}_i\}$ 写开, 两边取自然对数, 整理可得

$$\begin{aligned} \text{Vol} \left\{ x \mid \lambda \leq \exp \left\{ -\frac{1}{2}N\tilde{\varphi}_i \right\} \right\} &= \text{Vol} \left\{ x \mid \lambda \leq \frac{\exp \left\{ -\frac{1}{2}N\varphi_i \right\}}{\left(\int_M \exp \{-N\varphi_i\} \right)^{\frac{1}{2}}} \right\} \\ &= \text{Vol} \left\{ x \mid \frac{2}{N} \log \lambda + \frac{1}{N} \log \int_M \exp \{-N\varphi_i\} \leq -\varphi_i \right\}. \end{aligned} \quad (2.68)$$

由假设 $\lim_{i \rightarrow \infty} \int_M \exp \{-\frac{1}{2}N\varphi_i\} = \infty$, 所以当 i 充分大的时候, 有:

$$\begin{aligned} \text{Vol} \left\{ x \mid \lambda \leq \exp \left\{ -\frac{1}{2}N\tilde{\varphi}_i \right\} \right\} &\leq \text{Vol} \left\{ x \mid 0 < \frac{2}{N} \log \lambda + \frac{1}{N} \log \int_M \exp \{-N\varphi_i\} \leq \left| \varphi_i \right| \right\} \\ &\leq \left(\frac{2}{N} \log \lambda + \frac{1}{N} \log \int_M \exp \{-N\varphi_i\} \right)^{-1} \int_M |\varphi_i|. \end{aligned} \quad (2.69)$$

上式中第一个小于等于号是因为当 i 充分大时, 首先保证了

$$\frac{2}{N} \log \lambda + \frac{1}{N} \log \int_M \exp \{-N\varphi_i\} > 0.$$

其次将 (2.68) 中 $-\varphi_i$ 代换为 $|\varphi_i|$ 后集合的测度不减。第二个小于等于号由 (2.67) 即可得到。

由假设 (2.33), 有 $\{\int_M |\varphi_i|\}$ 一致有界, 所以在上式中让 i 趋于无穷, 右端分子有界, 分母趋于 $+\infty$, 右端项趋于 0, 所以对任意 $\lambda > 0$, 有:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \text{Vol} \left\{ x \mid \lambda \leq \exp \left\{ -\frac{1}{2} N \tilde{\varphi}_i \right\} \right\} = 0. \quad (2.70)$$

接着, 我们考虑集合 $\{x \mid \lambda \leq f(x)\}$ 的测度: 首先, 因为 f 是序列 $\{\exp \{-\frac{1}{2} N \tilde{\varphi}_i\}\}$ 在 $L^2(M)$ 范数下的极限, 我们有 $f \geq 0$, 我们证明如下包含关系:

$$\{x \mid \lambda \leq f(x)\} \subset \left\{ x \mid \frac{1}{2} \lambda \leq \left| f - \exp \left\{ -\frac{1}{2} N \tilde{\varphi}_i \right\} \right| \right\} \cup \left\{ x \mid \frac{1}{2} \lambda \leq \exp \left\{ -\frac{1}{2} N \tilde{\varphi}_i \right\} \right\}. \quad (2.71)$$

这是因为, 若 $|f - \exp \{-\frac{1}{2} N \tilde{\varphi}_i\}| < \frac{1}{2} \lambda$ 并且 $\exp \{-\frac{1}{2} N \tilde{\varphi}_i\} < \frac{1}{2} \lambda$, 则我们有:

$$f = |f| \leq \left| f - \exp \left\{ -\frac{1}{2} N \tilde{\varphi}_i \right\} \right| + \exp \left\{ -\frac{1}{2} N \tilde{\varphi}_i \right\} < \lambda.$$

所以要是 $f(x) \geq \lambda$, x 必须至少属于 (2.71) 右边两集合中的一个, 再由测度的次可列可加性, 我们有:

$$\begin{aligned} \text{Vol}\{x \mid \lambda \leq f(x)\} &\leq \text{Vol} \left\{ x \mid \frac{1}{2} \lambda \leq \left| f - \exp \left\{ -\frac{1}{2} N \tilde{\varphi}_i \right\} \right| \right\} \\ &\quad + \text{Vol} \left\{ x \mid \frac{1}{2} \lambda \leq \exp \left\{ -\frac{1}{2} N \tilde{\varphi}_i \right\} \right\} \\ &\leq \frac{4}{\lambda^2} \int_M \left| f - \exp \left\{ -\frac{1}{2} N \tilde{\varphi}_i \right\} \right|^2 + \text{Vol} \left\{ x \mid \frac{1}{2} \lambda \leq \exp \left\{ -\frac{1}{2} N \tilde{\varphi}_i \right\} \right\}. \end{aligned} \quad (2.72)$$

由假设, $\exp \{-\frac{1}{2} N \tilde{\varphi}_i\}$ 依 L^2 范数收敛到函数 $f \in L^2(M)$, 所以 (2.72) 第二行第一项当 $i \rightarrow \infty$ 时, 趋向于 0. 再由 (2.70) 可知上式第二行第二项也等于 0. 因此, 对任意 $\lambda > 0$, 有:

$$\text{Vol}\{x \mid \lambda \leq f\} = 0. \quad (2.73)$$

因为 f 为 $\exp \{-\frac{1}{2} N \tilde{\varphi}_i\}$ 在 L^2 范数的极限, $f \geq 0$, 由上式可知 f 在流形 M 上几乎处处为 0. 而由 (2.66) 可知 $\exp \{-\frac{1}{2} N \tilde{\varphi}_i\}$ 的 $L^2(M)$ 范数恒等于 1, 所以 $\int_M f^2 = 1$, 这与 (2.73) 矛盾。

从上述计算中我们可以看到, 推出矛盾的过程仅与 N, F 和流形 M 有关, 所以我们不但证明了 $\int_M \exp\{-N\varphi\}$ 存在上界估计, 而且知道该上界仅依赖于 N, F 和流形 M .

接着我们用类似 $m = 2$ 时的讨论, 因为 Schauder 估计对任意维数都成立, 我们可以找到仅依赖于流形 M 和 C 的常数 C_7 , 使得:

$$\sup_M |\nabla \varphi| \leq C_7(\exp\{-C \inf \varphi\} + 1). \quad (2.74)$$

我们仍考虑球心在 φ 的最小值点 q 处, 半径为 $-\frac{1}{2} \inf \varphi C_7^{-1}(\exp\{-C \inf \varphi\} + 1)^{-1}$ 的在球心单射半径内的测地球。由中值定理我们同样可以得到在球内 φ 不会超过 $\frac{1}{2} \inf_M \varphi$ 。

当 N 充分大的时候, 我们有:

$$\int_{B(q,r)} \exp\{-N\varphi\} \geq C_{12} \exp\left\{-\frac{1}{2}N \inf \varphi\right\} \left(-\frac{1}{2} \inf \varphi\right)^{2m} C_7^{-2m} (\exp\{-C \inf \varphi\} + 1)^{-2m}, \quad (2.75)$$

其中 C_{12} 为一个仅依赖于流形 M 的正常数。又因为我们已经证明 $\int_M \exp\{-N\varphi\}$ 的有仅依赖于 N, F 和流形 M 的上界估计, 因为上式右端为关于 $-\inf_M \varphi$ 的递增函数并且在无穷远处趋向于 $+\infty$, 而它又有上界, 所以我们知道 $-\inf_M \varphi$ 存在上界估计。因此得到了 $\sup_M |\varphi|$, 即 φ 的 C^0 估计。

至此我们得到了 $\sup_M |\varphi|$ 的估计, $\sup_M |\nabla \varphi|$ 的估计, 以及 $\sup_M (m + \Delta \varphi)$ 的估计。因为 $(g_{i\bar{j}} + \varphi_{i\bar{j}})$ 为正定的 Hermitian 矩阵, 在特殊坐标系下, 对任意 i , $1 + \varphi_{i\bar{i}}$ 均为正数, 并且我们有:

$$1 + \varphi_{i\bar{i}} \leq m + \Delta \varphi = \sum_i (1 + \varphi_{i\bar{i}}).$$

再结合 $\sup_M (m + \Delta \varphi)$ 的估计, 我们由此可以给出每一个 $1 + \varphi_{i\bar{i}}$ 的上界估计。

又由 $\prod_{i=1}^m (1 + \varphi_{i\bar{i}}) = \exp\{F\}$, 若存在 i , 使得 $1 + \varphi_{i\bar{i}}$ 趋向于 0, 则必然对某个 j 有 $1 + \varphi_{j\bar{j}}$ 趋向于 ∞ , 矛盾, 所以 $1 + \varphi_{i\bar{i}}$ 存在正下界。

因此, 我们证明了度量 $\sum_{i,j} (g_{i\bar{j}} + \partial^2 \varphi / \partial z^i \partial \bar{z}^j) dz^i \otimes d\bar{z}^j$ 与 $\sum_{i,j} g_{i\bar{j}} dz^i \otimes d\bar{z}^j$ 一致等价。

总结起来, 我们证明了如下命题:

命题 2. 记 M 为一个紧凯勒流形, 其度量张量为 $g = \sum_{i,j} g_{i\bar{j}} dz^i \otimes d\bar{z}^j$. 假设 $\varphi \in C^4(M)$ 为一个实值函数, 满足:

$$\int_M \varphi = 0,$$

并且

$$\sum_{i,j} (g_{i\bar{j}} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^i \partial \bar{z}^j}) dz^i \otimes d\bar{z}^j,$$

定义了流形 M 上的另一度量。若对于某个实值光滑函数 $F \in C^\infty(M)$, 有:

$$\det(g_{i\bar{j}} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^i \partial \bar{z}^j}) \det(g_{i\bar{j}})^{-1} = \exp F.$$

则存在仅依赖于 $\inf_M F, \sup_M F, \inf_M \Delta F$ 和 M 的常数 C_1, C_2, C_3 和 C_4 , 满足 $\sup_M |\varphi| \leq C_1, \sup_M |\nabla \varphi| \leq C_2, 0 < C_3 \leq 1 + \varphi_{i\bar{i}} \leq C_4, \forall i$.

2.3 解的 C^3 估计

对三阶估计我们仿照卡拉比 [Cal58] 的做法, 考虑函数:

$$S = \sum g^{i\bar{r}} g^{j\bar{s}} g^{k\bar{t}} \varphi_{i\bar{j}k} \varphi_{\bar{r}s\bar{t}}.$$

我们考虑特殊的坐标系, 即在一点处, 度量矩阵 $(g_{i\bar{j}})$ 等于单位阵, 且 $(\varphi_{i\bar{j}})$ 为对角矩阵。经过一系列较为复杂的计算, 我们可以得到:

$$\begin{aligned} \Delta' S \cong & \sum (1 + \varphi_{i\bar{i}})^{-1} (1 + \varphi_{j\bar{j}})^{-1} (1 + \varphi_{k\bar{k}})^{-1} (1 + \varphi_{\alpha\bar{\alpha}})^{-1} \\ & \times \left\{ \left| \varphi_{i\bar{j}k\alpha} - \sum_p \varphi_{i\bar{p}k} \varphi_{p\bar{j}\alpha} (1 + \varphi_{p\bar{p}})^{-1} \right|^2 \right. \\ & \left. + \left| \varphi_{i\bar{j}k\alpha} - \sum_p (\varphi_{p\bar{i}\alpha} \varphi_{p\bar{j}k} + \varphi_{p\bar{i}k} \varphi_{p\bar{j}\alpha}) (1 + \varphi_{p\bar{p}})^{-1} \right|^2 \right\}. \end{aligned} \quad (2.76)$$

其中 $A \cong B$ 表示 $|A - B| \leq C_1 S + C_2 \sqrt{S} + C_3$, 其中 C_1, C_2, C_3 均为可以被估计的常数。另一方面, 根据之前计算, 我们有:

$$\Delta'(\Delta\varphi) \geq \sum (1 + \varphi_{k\bar{k}})^{-1} (1 + \varphi_{i\bar{i}})^{-1} |\varphi_{k\bar{i}j}|^2 - C_4,$$

其中 C_4 为一个可以估计的常数。因此我们再假设 C_5 为一个充分大的正常数, 有:

$$\Delta'(S + C_5 \Delta\varphi) \geq C_6 S - C_7, \quad (2.77)$$

其中 C_6, C_7 均为可以被估计的正常数。将上式两边加上 $C_6 C_5 \Delta\varphi$, 有:

$$\Delta'(S + C_5 \Delta\varphi) + C_6 C_5 \Delta\varphi \geq C_6 S - C_7 + C_6 C_5 \Delta\varphi,$$

在 $S + C_5 \Delta\varphi$ 取到最大值点处, 有 $\Delta'(S + C_5 \Delta\varphi) \leq 0$, 因此移项有:

$$C_6(S + C_5 \Delta\varphi) \leq C_7 + C_6 C_5 \Delta\varphi.$$

而我们已经有了 $\Delta\varphi$ 的一致估计, 所以上式右端有界, 因此得到 $\sup_M(S+C_7\Delta\varphi)$ 的估计, 因此得到 $\sup_M S$ 的估计, 由此对任意 i, j, k 得到 $\varphi_{i\bar{j}k}$ 的估计。所以我们看到, 在 (2.77) 两端添加项 $C_6C_5\Delta\varphi$ 的原因是为了凑出 $S + C_5\Delta\varphi$ 。

因此总结起来, 我们有如下命题:

命题 3. 记 M 为一个紧凯勒流形, 其度量张量为 $g = \sum_{i,j} g_{i\bar{j}} dz^i \otimes d\bar{z}^j$. 假设 $\varphi \in C^4(M)$ 为一个实值函数, 满足:

$$\int_M \varphi = 0,$$

并且 $\sum_{i,j} (g_{i\bar{j}} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^i \partial \bar{z}^j}) dz^i \otimes d\bar{z}^j$ 定义了流形 M 上的另一度量。若对于某个实值光滑函数 $F \in C^\infty(M)$, 有:

$$\det(g_{i\bar{j}} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^i \partial \bar{z}^j}) \det(g_{i\bar{j}})^{-1} = \exp F.$$

则 $\varphi_{i\bar{j}k}$ 有仅依赖于 $\sum_{i,j} g_{i\bar{j}} dz^i \otimes d\bar{z}^j, \sup_M |F|, \sup_M |\nabla F|, \sup_M \sup_i |F_{i\bar{i}}|$ 和 $\sup_M \sup_i |F_{i\bar{j}k}|$ 的估计。

第三章 求解复蒙日-安培方程

现在我们可以证明复蒙日-安培方程

$$\det(g_{i\bar{j}} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^i \partial \bar{z}^j}) \det(g_{i\bar{j}})^{-1} = \exp F, F \in C^3(M; \mathbb{R}). \quad (3.1)$$

解的存在性，并给出正则性估计。将方程两边积分，因为在同一个凯勒类中的凯勒形式对应的流形体积相同，事实上我们可将上式写为：

$$(\omega + \sqrt{-1} \partial \bar{\partial} \varphi)^m = \exp\{F\} \omega^m.$$

左端项展开，分部积分即可看出这一事实。所以我们得到函数 F 应该满足必要条件：

$$\int_M \exp F = \text{Vol}(M).$$

接下来我们将证明，如果 $F \in C^k(M), \forall k \geq 3$ 并且 F 满足上式，那么存在 φ 满足方程 (3.1)，并且 $\varphi \in C^{k+1, \alpha}(M), \forall 0 \leq \alpha < 1$. 我们将用经典的连续性方法证明解的存在性，这也是求解非线性微分方程常用方法。为此，我们需要考虑一族带参数的复蒙日安培方程，使得在参数 t 的一边端点处，显然有解，再试图说明该集合既开又闭。我们考虑集合：

$$\begin{aligned} S &= \left\{ t \in [0, 1] \mid \text{方程 } \det \left(g_{i\bar{j}} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} \right) \det (g_{i\bar{j}})^{-1} \right. \\ &= \text{Vol}(M) \left[\int \exp\{tF\} \right]^{-1} \exp\{tF\} \text{ 存在解 } \varphi \in C^{k+1, \alpha}(M) \left. \right\}. \end{aligned}$$

我们可以直接看出 $0 \in S$ ，因为当 $t = 0$ 时，任意常值函数 φ 都满足方程。

如果能进一步证明 S 既是开集又是闭集，即说明了 S 只能为全集， $S = [0, 1]$. 而 $1 \in S$ 就意味着复蒙日-安培方程存在解 $\varphi \in C^{k+1, \alpha}(M)$.

首先，为了说明 S 是开集，我们用标准的反函数定理 [Sch69]：

定理 1 (反函数定理). 记 X, Y 为两个 *Banach* 流形, $x_0 \in X, y_0 \in Y$, 并记 $G : X \rightarrow Y$ 为具有 C^1 -Frechet 导数的映射。假设: (1) $G(x_0) = y_0$; (2) $D_{x_0}G : T_{x_0}X \rightarrow T_{y_0}Y$ 为 *Banach* 空间之间的同构。则存在开邻域 U, V , 使得 $x_0 \in U \subset X, y_0 \in V \subset Y$, 以及一个具有 C^1 -Frechet 导数的映射 $F : V \rightarrow U$, 使得 $G(F(y)) = y, \forall y \in V$ 。

虽然上述定理中有些概念我们并没有严格给出定义, 但是在具体使用中, 类比欧氏空间的反函数定理, 其使用是直接的。

我们记:

$$\theta := \left\{ \varphi \in C^{k+1,\alpha}(M) \mid 1 + \varphi_{i\bar{i}} > 0, \forall i, \text{ 并且 } \int_M \varphi = 0 \right\},$$

以及

$$B := \left\{ f \in C^{k-1,\alpha}(M) \mid \int_M f = \text{Vol } M \right\}.$$

由定义, 我们知道 θ 是 *Banach* 空间 $C^{k+1,\alpha}(M)$ 中的开集, B 是 *Banach* 空间 $C^{k-1,\alpha}(M)$ 中的仿射超平面, 事实上对任意函数 $f \in B$, 考虑函数 $f - 1$, 即有 $\int_M (f - 1) = 0$, 所以将 B 平移后, 得到过 *Banach* 空间中原点的线性空间。

考虑映射 $G : \theta \rightarrow B$:

$$G(\varphi) = \det \left(g_{i\bar{j}} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} \right) \det(g_{i\bar{j}})^{-1}.$$

为了使用反函数定理, 我们需要计算 G 在任意给定一点处 φ_0 的微分, 并期望说明其微分既单又满, 从而得出线性空间之间的同构, 用行列式的求导法则有:

$$\begin{aligned} dG_{\varphi_0}(\varphi_0 + t\varphi) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} G(\varphi_0 + t\varphi) \\ &= \det \left(g_{i\bar{j}} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} \right) \det(g_{i\bar{j}})^{-1} \Delta_{\varphi_0}(\varphi_0). \end{aligned}$$

因此 G 在 φ_0 的微分为 $\det \left(g_{i\bar{j}} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} \right) \det(g_{i\bar{j}})^{-1} \Delta_{\varphi_0}$, 其中 Δ_{φ_0} 为度量 $\sum_{i,j} (g_{i\bar{j}} + \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial z^i \partial \bar{z}^j}) dz^i \otimes d\bar{z}^j$ 相应的拉普拉斯算子。

因为 B 为仿射空间, 所以其在任意点处的切空间均为 $C^{k-1,\alpha}(M)$ 中满足 $\int_M f = 0$ 的函数, 即:

$$\{f \in C^{k-1,\alpha}(M) \mid \int_M f = 0\}.$$

接着应用 Fredholm 二择一理论 [Eva10], 可知 $\Delta_{\varphi_0} \varphi = g$ 存在弱解的充要条件为 $\int_M g dV_{\varphi_0} = 0$. 所以要想使方程:

$$\det \left(g_{i\bar{j}} + \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} \right) \det(g_{i\bar{j}})^{-1} \Delta_{\varphi_0} \varphi = f. \quad (3.2)$$

存在弱解，而上式等价于：

$$\Delta_{\varphi_0} \varphi = \det \left(g_{i\bar{j}} + \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} \right)^{-1} \det(g_{i\bar{j}}) f.$$

我们需要：

$$\int_M \det \left(g_{i\bar{j}} + \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} \right)^{-1} \det(g_{i\bar{j}}) f dV_{\varphi_0} = \int_M f dV_{\varphi} = 0.$$

即恰好 dG_{φ_0} 的像全都落在 B 的切空间中，因此现在我们可以试图说明映射 G 在一点 φ_0 处的微分 dG_{φ_0} 是既单又满的：

由经典的 Schauder 理论，我们知道，对于椭圆方程 (3.2)，只要函数 $f \in C^{k-1,\alpha}(M)$ ，就可以保证存在解 $\varphi \in C^{k+1,\alpha}(M)$ 。这说明 dG_{φ_0} 是满射。

还需要说明单射，考虑方程：

$$\det \left(g_{i\bar{j}} + \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} \right) \det(g_{i\bar{j}})^{-1} \Delta_{\varphi_0} \varphi = 0. \quad (3.3)$$

显然，我们有 $\varphi \equiv 0$ 为上述方程的解。又因为任意两个满足方程 (3.2) 的解做差，就得到上述方程的解，由极大值原理可知，两个解之间至多相差一个常数。因为我们要求 φ 满足条件 $\int_M \varphi = 0$ ，所以 $\varphi \equiv 0$ 为满足方程 (3.3) 的唯一解。

因此，我们证明了 dG_{φ_0} 为既单又满的线性映射，应用反函数定理，便得到 G 将 φ_0 的一个开邻域映为 $G(\varphi_0)$ 在 B 中的一个开邻域，因此 S 是开集。

接下来还需要证明 S 是闭集：

我们考虑证明 S 是自列紧的，因为在 $\mathbb{R}$ 中紧等价于自列紧等价于有界闭集。假设 $\{t_q\}$ 为 S 中的序列，即我们有序列 $\{\varphi_q\} \subset C^{k+1,\alpha}(M)$ ，满足：

$$\det \left(g_{i\bar{j}} + \frac{\partial^2 \varphi_q}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} \right) \det(g_{i\bar{j}})^{-1} = \text{Vol}(M) \left(\int_M \exp \{t_q F\} \right)^{-1} \exp \{t_q F\}.$$

因为对每个函数 φ_q 加减任意常数仍满足上述方程，不妨假设 $\int_M \varphi_q = 0$ 。将上式两边在法坐标系下同时取关于 $\frac{\partial}{\partial z^p}$ 的微分，用行列式求导法则，得到：

$$\begin{aligned} \det \left(g_{i\bar{j}} + \frac{\partial^2 \varphi_q}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} \right) \sum_{i,j} g_q^{i\bar{j}} \frac{\partial^2}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} \left(\frac{\partial \varphi_q}{\partial z^p} \right) \\ = \text{Vol}(M) \left(\int_M \exp \{t_q F\} \right)^{-1} \frac{\partial}{\partial z^p} [\exp \{t_q F\} \det(g_{i\bar{j}})]. \end{aligned}$$

其中 $(g_q^{i\bar{j}})$ 表示 $(g_{i\bar{j}} + \frac{\partial^2 \varphi_q}{\partial z^i \partial \bar{z}^j})$ 的逆矩阵。

我们已经证明了 $1 + \varphi_{i\bar{i}}$ 有两边估计, 即上式左端的算子为一致椭圆算子, 再由 φ 的三阶估计, 可知上式左端项为 α -Hölder 连续的, α 为任意 $[0, 1]$ 中的数。

用系数连续的一致椭圆方程正则性理论, 由 Schauder 估计即得到 $\frac{\partial \varphi_q}{\partial z^p}$ 的 $C^{2,\alpha}(M)$ 估计, 同理我们有 $\frac{\partial \varphi_q}{\partial \bar{z}^p}$ 的 $C^{2,\alpha}(M)$ 估计, 从而进一步得到上式左端算子的系数属于 $C^{1,\alpha}(M)$, 用所谓 Bootstrap 的方法我们最终得到了 φ_q 的 $C^{k+1,\alpha}(M)$ 估计。又由 Arzela-Ascoli 定理即知 $\{\varphi_q\}$ 存在子列, 在 $C^{k+1,\alpha}(M)$ 中收敛到 φ , 并且 φ 满足:

$$\det \left(g_{i\bar{j}} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} \right) \det(g_{i\bar{j}})^{-1} = \text{Vol}(M) \left(\int_M \exp \{t_0 F\} \right)^{-1} \exp \{t_0 F\}.$$

其中 $t_0 = \lim_{q \rightarrow \infty} t_q$, 因此序列 $\{t_q\}$ 存在收敛子列, 即说明 S 为闭集。

因此我们得到了如下定理:

定理 2. 记 M 为一个紧凯勒流形, 其度量张量为 $\sum_{i,j} g_{i\bar{j}} dz^i \otimes d\bar{z}^j$. 假设 $F \in C^k(M)$, $k \geq 3$ 并且满足 $\int_M \exp F = \text{Vol}(M)$. 则存在函数 $\varphi \in C^{k+1,\alpha}(M)$, $\forall 0 \leq \alpha < 1$, 使得 $\sum_{i,j} (g_{i\bar{j}} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^i \partial \bar{z}^j}) dz^i \otimes d\bar{z}^j$ 仍为一个凯勒度量, 并且满足:

$$\det \left(g_{i\bar{j}} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} \right) = \exp F \det(g_{i\bar{j}}). \quad (3.4)$$

回顾卡拉比猜想, 即:

令 M 为一个紧凯勒流形, 其度量张量为 $\sum_{i,j} g_{i\bar{j}} dz^i \otimes d\bar{z}^j$, 其 Ricci 张量为 $\sum_{i,j} R_{i\bar{j}} dz^i \otimes d\bar{z}^j$, 陈省身 [Che46] 证明了 Ricci 张量相应的一个 $(1, 1)$ -形式: $\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \sum_{i,j} R_{i\bar{j}} dz^i \wedge d\bar{z}^j$ 就代表了流形 M 的第一陈类。

之后卡拉比提出了如下问题:

如果 $(1, 1)$ -形式 $\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \sum_{i,j} \tilde{R}_{i\bar{j}} dz^i \wedge d\bar{z}^j$ 为另一个第一陈类中的代表元, 那么是否能找到一个流形 M 上的凯勒度量, 使得 $\sum_{i,j} \tilde{R}_{i\bar{j}} dz^i \otimes d\bar{z}^j$ 为该凯勒度量对应的 Ricci 张量?

上述定理就给出了 Calabi 猜想的肯定结论。事实上, 我们知道:

$$R_{\alpha\bar{\beta}} = -\frac{\partial^2}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta} \log \det(g_{i\bar{j}}).$$

由问题假设, $\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \sum \tilde{R}_{\alpha\bar{\beta}} dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta$ 为第一陈类的代表元, 由 $\partial\bar{\partial}$ -引理知道:

$$\tilde{R}_{\alpha\bar{\beta}} = R_{\alpha\bar{\beta}} - \frac{\partial^2}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta} f,$$

其中 f 为某实值光滑函数。

由上述定理, 我们可以找到光滑函数 φ , 使得 $\sum_{i,j} (g_{i\bar{j}} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^i \partial \bar{z}^j}) dz^i \otimes d\bar{z}^j$ 仍为一个凯勒度量, 并且满足方程:

$$\det \left(g_{\alpha\bar{\beta}} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta} \right) \det (g_{\alpha\bar{\beta}})^{-1} = C \exp\{f\}.$$

其中 C 为一个给定常数, 满足:

$$\int_M C \exp\{f\} = \text{Vol}(M).$$

因此, 我们证明了如下定理:

定理 3. 记 M 为一个紧凯勒流形, 其度量张量为 $\sum_{i,j} g_{i\bar{j}} dz^i \otimes d\bar{z}^j$. 若张量 $\sum_{i,j} \tilde{R}_{i\bar{j}} dz^i \otimes d\bar{z}^j$ 对应的 $(1,1)$ -形式 $\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \sum_{i,j} \tilde{R}_{i\bar{j}} dz^i \wedge d\bar{z}^j$ 为流形第一陈类的代表元, 那么我们可以找到一个凯勒度量 $\sum_{i,j} \tilde{g}_{i\bar{j}} dz^i \otimes d\bar{z}^j$ 使得其 *Ricci* 张量等于 $\sum_{i,j} \tilde{R}_{i\bar{j}} dz^i \otimes d\bar{z}^j$. 更进一步, 新度量对应的凯勒形式与原始度量对应的凯勒形式在同一个凯勒类里, 并且满足上述条件的凯勒度量是唯一的。

第四章 具有更一般右端项的复蒙日-安培方程

本节我们将研究如下形式的方程：

$$\det \left(g_{i\bar{j}} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} \right) = \exp\{F(x, \varphi)\} \det(g_{i\bar{j}}). \quad (4.1)$$

其中 $\sum_{i,j} g_{i\bar{j}} dz^i \otimes d\bar{z}^j$ 为紧凯勒流形 M 的凯勒度量， F 为定义在 $M \times \mathbb{R}$ 上的光滑函数，并且满足 $\frac{\partial F}{\partial t} \geq 0$.

求解上述方程，即找一个满足方程的光滑实值函数 φ ，并且使得 $\sum_{i,j} (g_{i\bar{j}} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^i \partial \bar{z}^j}) dz^i \otimes d\bar{z}^j$ 仍为一个凯勒度量。为保证这样的函数 φ 存在，将方程两边积分即得到必要条件，存在光滑函数 ψ 满足：

$$\int_M \exp\{F(x, \psi)\} = \text{Vol}(M).$$

由定理 2，已经知道当 (4.1) 右端项取成固定光滑函数 ψ 时，光滑解 φ 的存在性，接着我们将用迭代的方法求解上述更一般的方程。为了保证解的光滑性，我们还需要对 φ 做各阶先验估计。

4.1 更一般复蒙日-安培方程解的 C^0 估计

首先证明 (4.1) 解的唯一性：

引理 3. 若 φ 和 $\bar{\varphi}$ 为满足方程 (4.1) 的两个光滑解，并且使得：

$$\sum_{i,j} (g_{i\bar{j}} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^i \partial \bar{z}^j}) dz^i \otimes d\bar{z}^j,$$

以及

$$\sum_{i,j} (g_{i\bar{j}} + \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial z^i \partial \bar{z}^j}) dz^i \otimes d\bar{z}^j.$$

均为流形 M 的凯勒度量。则 $\varphi - \bar{\varphi}$ 为常数。

证明. 由 φ 和 $\bar{\varphi}$ 均满足方程 (4.1), 两式相除, 并凑出关于 $\varphi - \bar{\varphi}$ 的项, 得到:

$$\det \left(g_{i\bar{j}} + \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} + \frac{\partial^2 (\varphi - \bar{\varphi})}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} \right) \det \left(g_{i\bar{j}} + \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} \right)^{-1} = \exp \{ F(x, \varphi) - F(x, \bar{\varphi}) \}. \quad (4.2)$$

记 Δ_φ 为关于度量 $\sum_{i,j} \left(g_{i\bar{j}} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} \right) dz^i \otimes d\bar{z}^j$ 的拉普拉斯算子, 我们将上式方便的记为:

$$\det (g_{i\bar{j}} + \bar{\varphi}_{i\bar{j}} + (\varphi - \bar{\varphi})_{i\bar{j}}) \det (g_{i\bar{j}} + \bar{\varphi}_{i\bar{j}})^{-1} = \exp \{ F(x, \varphi) - F(x, \bar{\varphi}) \}.$$

选取坐标系, 使得矩阵 $(g_{i\bar{j}})$ 为单位矩阵, 并且 $(\varphi_{i\bar{j}}), (\bar{\varphi}_{i\bar{j}})$ 同时为对角矩阵, 这由矩阵变换可以做到。

则上式在这一坐标系下变为:

$$\frac{\prod_{i=1}^m (1 + \bar{\varphi}_{i\bar{i}} + (\varphi - \bar{\varphi})_{i\bar{i}})}{\prod_{i=1}^m (1 + \bar{\varphi}_{i\bar{i}})} = \prod_{i=1}^m \left(1 + \frac{(\varphi - \bar{\varphi})_{i\bar{i}}}{1 + \bar{\varphi}_{i\bar{i}}} \right) = \exp \{ F(x, \varphi) - F(x, \bar{\varphi}) \}.$$

用均值不等式, 得到:

$$\frac{m + \Delta_\varphi(\varphi - \bar{\varphi})}{m} = \frac{\sum_{i=1}^m \left(1 + \frac{(\varphi - \bar{\varphi})_{i\bar{i}}}{1 + \bar{\varphi}_{i\bar{i}}} \right)}{m} \geq \sqrt[m]{\prod_{i=1}^m \left(1 + \frac{(\varphi - \bar{\varphi})_{i\bar{i}}}{1 + \bar{\varphi}_{i\bar{i}}} \right)} = \exp \left\{ \frac{1}{m} [F(x, \varphi) - F(x, \bar{\varphi})] \right\}.$$

即我们有如下不等式:

$$\frac{m + \Delta_\varphi(\varphi - \bar{\varphi})}{m} \geq \left[\det (g_{i\bar{j}} + \varphi_{i\bar{j}}) \det (g_{i\bar{j}} + \bar{\varphi}_{i\bar{j}})^{-1} \right]^{1/m} \quad (4.3)$$

所以我们有:

$$m + \Delta_\varphi(\varphi - \bar{\varphi}) \geq m \exp \left\{ \frac{1}{m} [F(x, \varphi) - F(x, \bar{\varphi})] \right\}. \quad (4.4)$$

再由经典的中值定理:

$$F(x, \varphi) - F(x, \bar{\varphi}) = \int_{\bar{\varphi}(x)}^{\varphi(x)} \frac{\partial F}{\partial t}(x, \tau) d\tau = \frac{\partial F}{\partial t}(x, \bar{t}(x))(\varphi(x) - \bar{\varphi}(x)). \quad (4.5)$$

其中 $\bar{t}(x)$ 为 $\inf(\varphi(x), \bar{\varphi}(x))$ 与 $\sup(\varphi(x), \bar{\varphi}(x))$ 之间的某个数。

由于 $\frac{\partial F}{\partial t} \geq 0$, 从 (4.5) 可知, 当 $\varphi(x) - \bar{\varphi}(x) > 0$ 时,

$$F(x, \varphi) - F(x, \bar{\varphi}) \geq 0,$$

因此 (4.4) 右端项 $m \exp\{\frac{1}{m}[F(x, \varphi) - F(x, \bar{\varphi})]\} \geq m$, 从而 $\Delta_\varphi(\varphi - \bar{\varphi}) \geq 0$.

由极大值原理可知 $\varphi - \bar{\varphi}$ 恒为常数: 考虑 $E = \{x \mid \varphi(x) - \bar{\varphi}(x) < 0\}$, 上的积分:

$$0 \geq \int_E (\varphi - \bar{\varphi}) \cdot \Delta_\varphi(\varphi - \bar{\varphi}) = \int_E |\nabla(\varphi - \bar{\varphi})|^2 \geq 0.$$

因此 $\varphi - \bar{\varphi}$ 在 E 上恒为常数。同理, 在上述证明中交换 $\varphi, \bar{\varphi}$ 的位置即可得到 $\varphi - \bar{\varphi}$ 在 $M \setminus E$ 上恒为常数。又由于 $\varphi - \bar{\varphi}$ 为光滑函数, 我们知道在流形 M 上 $\varphi - \bar{\varphi}$ 恒为常数。□

接着我们用迭代的方法证明方程 (4.1) 解的存在性以及 C^0 估计。由定理 2, 存在光滑函数 φ_0 使得 $\sum_{i,j}(g_{i\bar{j}} + \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial z^i \partial \bar{z}^j}) dz^i \otimes d\bar{z}^j$ 为凯勒度量且满足方程:

$$\det \left(g_{i\bar{j}} + \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} \right) = \exp\{F(x, \psi)\} \det(g_{i\bar{j}}). \quad (4.6)$$

记 $\bar{\varphi}_0 = \varphi_0 + \sup_M |\varphi_0 - \psi|$ 以及 $\bar{\bar{\varphi}}_0 = \varphi_0 - \sup_M |\varphi_0 - \psi|$, 均为 φ_0 加减一个常数, 所以都满足上述方程, 并且更进一步, 由定义可知, 对任意 $x \in M$ 有:

$$\bar{\varphi}_0(x) \geq \psi(x) \geq \bar{\bar{\varphi}}_0(x). \quad (4.7)$$

记 $A := \{(x, t) \mid x \in M, \bar{\varphi}_0(x) \geq t \geq \bar{\bar{\varphi}}_0(x)\}$ 由于 M 为紧流形, $\bar{\varphi}_0, \bar{\bar{\varphi}}_0$ 都是紧流形上的光滑函数, 所以有界。因此可知 A 为 $M \times \mathbb{R}$ 的紧子集, 所以我们可以定义:

$$k := \sup_{(x,t) \in A} \frac{\partial F}{\partial t}(x, t) + 1 > 0. \quad (4.8)$$

我们将用如下迭代格式:

记 $\bar{\varphi}_i, \bar{\bar{\varphi}}_i$ 分别为下面两个方程的光滑解, 为了区分指标, 当涉及到迭代过程时, 迭代指标记为 i , 张量的角标改用 α, β 表示:

$$\begin{aligned} \det \left(g_{\alpha\bar{\beta}} + \frac{\partial^2 \bar{\varphi}_i}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta} \right) &= \exp \{k \bar{\varphi}_i + F(x, \bar{\varphi}_{i-1}) - k \bar{\varphi}_{i-1}\} \det(g_{\alpha\bar{\beta}}), \\ \det \left(g_{\alpha\bar{\beta}} + \frac{\partial^2 \bar{\bar{\varphi}}_i}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta} \right) &= \exp \{k \bar{\bar{\varphi}}_i + F(x, \bar{\bar{\varphi}}_{i-1}) - k \bar{\bar{\varphi}}_{i-1}\} \det(g_{\alpha\bar{\beta}}), \end{aligned} \quad (4.9)$$

其中 $\sum_{\alpha,\beta} \left(g_{\alpha\bar{\beta}} + \frac{\partial^2 \bar{\varphi}_i}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta} \right) dz^\alpha \otimes d\bar{z}^\beta$ 和 $\sum_{\alpha,\beta} \left(g_{\alpha\bar{\beta}} + \frac{\partial^2 \bar{\bar{\varphi}}_i}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta} \right) dz^\alpha \otimes d\bar{z}^\beta$ 均为凯勒度量。

为了使用上述迭代格式, 我们首先需要证明具有上述特殊形式方程解的存在唯一性。我们证明如下引理:

引理 4. 记 M 为紧凯勒流形, 其凯勒度量记为 $\sum_{i,j}(g_{i\bar{j}} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^i \partial \bar{z}^j})dz^i \otimes d\bar{z}^j$. F 为 M 上的任意光滑函数. 则对任意常数 $k > 0$, 方程

$$\det \left(g_{i\bar{j}} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} \right) = \exp\{k\varphi + F\} \det(g_{i\bar{j}}). \quad (4.10)$$

存在唯一光滑解 φ , 使得 $\sum_{i,j}(g_{i\bar{j}} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^i \partial \bar{z}^j})dz^i \otimes d\bar{z}^j$ 仍为凯勒度量。

证明. 仿照定理 2 的证明过程, 我们仍然用连续性方法证明存在性, 考虑以 t 为参数的一族方程:

$$\det \left(g_{i\bar{j}} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} \right) = \exp\{k\varphi + tF\} \det(g_{i\bar{j}}). \quad (4.11)$$

其中最关键的还是关于 φ 的 C^0 估计, 但因为 $k > 0$, 使得情况变得很简单:

记在 φ 在流形 M 上的最大值点为 x_0 , 在这一点处, φ 的 Hessian 矩阵半负定, 选取特殊坐标系, 可知 $\forall i, \varphi_{i\bar{i}} \leq 0$, 因此有:

$$\det \left(g_{i\bar{j}} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} \right) \det(g_{i\bar{j}})^{-1} \leq 1.$$

由 (4.11) 可知, 上式左端项等于 $\exp\{k\varphi(x_0) + tF(x_0)\} \leq 1$, 即 $k\varphi(x_0) + tF(x_0) \leq 0$, 移项即得 $\sup_M \varphi = \varphi(x_0) \leq -\frac{t}{k}F(x_0)$, 即我们方便的得到了 $\sup_M \varphi$ 的估计。

类似的, 考虑在 φ 取到最小值点处 x_1 , 有:

$$\det \left(g_{i\bar{j}} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} \right) \det(g_{i\bar{j}})^{-1} \geq 1.$$

于是可以得到 $\inf_M \varphi \geq -\frac{t}{k}F(x_1)$. 接着类似定理 2 的证明过程, 就可以得到解的存在性。

又因为 $\frac{\partial(k\varphi + tF)}{\partial \varphi} = k > 0$, 所以方程 (4.10) 满足引理 3 中条件, 因此我们知道两个解之间至多相差一个常数, 记为 $\varphi - \tilde{\varphi} = c$, 而由方程 (4.10), 两个方程相除得到: $e^{kc} = 1$, 因为 $k \neq 0$, 即只能有 $c = 0$, 所以解还具有唯一性。 $\square$

上述定理保证了解的存在唯一性, 接着我们证明, 满足方程 (4.9) 的解之间, 存在如下关系, 对任意 $i \geq 0$:

$$\bar{\varphi}_0 \leq \bar{\varphi}_i \leq \bar{\varphi}_{i+1} \leq \bar{\varphi}_{i+1} \leq \bar{\varphi}_i \leq \bar{\varphi}_0. \quad (4.12)$$

我们采用数学归纳法：当 $i = 0$ ，我们考虑 $\bar{\varphi}_1$ 满足方程 (4.9)，再用不等式 (4.7) 进行放缩，由于 φ_0 满足方程 (4.6)，我们即可得到如下不等式：

$$\begin{aligned} \det \left(g_{\alpha\bar{\beta}} + \frac{\partial^2 \bar{\varphi}_1}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta} \right) &= \exp \{k\bar{\varphi}_1 - k\bar{\varphi}_0\} \exp \{F(x, \bar{\varphi}_0)\} \det(g_{\alpha\bar{\beta}}) \\ &\geq \exp \{k(\bar{\varphi}_1 - \bar{\varphi}_0)\} \exp \{F(x, \psi)\} \det(g_{\alpha\bar{\beta}}) \\ &= \exp \{k(\bar{\varphi}_1 - \bar{\varphi}_0)\} \det \left(g_{\alpha\bar{\beta}} + \frac{\partial^2 \bar{\varphi}_0}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta} \right). \end{aligned} \quad (4.13)$$

在 $\bar{\varphi}_1 - \bar{\varphi}_0$ 取到最大值处，有 $\Delta(\bar{\varphi}_1 - \bar{\varphi}_0) \leq 0$ ，我们可以将上式重写为：

$$\frac{1}{m} [m + \Delta(\bar{\varphi}_1 - \bar{\varphi}_0)] \leq 1.$$

与 (4.3) 左端项的计算完全相同，通过考虑特殊坐标系，我们知道上式就等价于

$$\det \left(g_{\alpha\bar{\beta}} + \frac{\partial^2 \bar{\varphi}_1}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta} \right) \leq \det \left(g_{\alpha\bar{\beta}} + \frac{\partial^2 \bar{\varphi}_0}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta} \right).$$

结合 (4.13) 我们即知 $\sup_M(\bar{\varphi}_1 - \bar{\varphi}_0) \leq 0$ 。

类似的讨论，写出 $\bar{\varphi}_1$ 满足的方程，并使用不等式 (4.7)，我们可以得到 $\sup_M(\bar{\bar{\varphi}}_0 - \bar{\varphi}_1) \leq 0$ 。即证明了 (4.12) 中第二、第四个不等号，对初始值 $i = 0$ 成立。

我们还需要证明第三个不等号成立，即 $\bar{\varphi}_1 \leq \bar{\varphi}_1$ ：在方程组 (4.9) 中，我们取 $i = 1$ ，并将两式相除，得到：

$$\begin{aligned} \det \left(g_{\alpha\bar{\beta}} + \frac{\partial^2 \bar{\varphi}_1}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta} \right) \det \left(g_{\alpha\bar{\beta}} + \frac{\partial^2 \bar{\bar{\varphi}}_1}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta} \right)^{-1} \\ = \exp \{k\bar{\varphi}_1 - k\bar{\bar{\varphi}}_1 + F(x, \bar{\varphi}_0) - F(x, \bar{\bar{\varphi}}_0) - k(\bar{\varphi}_0 - \bar{\bar{\varphi}}_0)\}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

由 (4.8) 中 k 的定义和 $\bar{\varphi}_0 \geq \bar{\bar{\varphi}}_0$ ，以及微分中值定理 (4.5) 可得，对任意 $x \in M$ 都有：

$$F(x, \bar{\varphi}_0) - F(x, \bar{\bar{\varphi}}_0) - k(\bar{\varphi}_0 - \bar{\bar{\varphi}}_0) \leq 0. \quad (4.15)$$

因此回到方程 (4.14)，有：

$$\det \left(g_{\alpha\bar{\beta}} + \frac{\partial^2 \bar{\varphi}_1}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta} \right) \det \left(g_{\alpha\bar{\beta}} + \frac{\partial^2 \bar{\bar{\varphi}}_1}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta} \right)^{-1} \geq \exp \{k(\bar{\bar{\varphi}}_1 - \bar{\varphi}_1)\}. \quad (4.16)$$

在 $\bar{\bar{\varphi}}_1 - \bar{\varphi}_1$ 的最大值点处，有 $\Delta(\bar{\bar{\varphi}}_1 - \bar{\varphi}_1) \leq 0$ ，等价于 $\frac{1}{m} [m + \Delta(\bar{\varphi}_1 - \bar{\varphi}_0)] \leq 1$ 。再由不等式 (4.3) 可知上式左端小于等于 1，又因为 $k \geq 0$ ，所以有 $\bar{\varphi}_1 \geq \bar{\bar{\varphi}}_1$ 。

接着我们用数学归纳法，假设对于任意 $j < i$ 已经有：

$$\bar{\bar{\varphi}}_0 \leq \bar{\bar{\varphi}}_{j-1} \leq \bar{\bar{\varphi}}_j \leq \bar{\varphi}_j \leq \bar{\varphi}_{j-1} \leq \bar{\varphi}_0.$$

我们证明将上式中的 j 替换为 i 之后结论仍然成立。我们将 (4.9) 分别取 $\bar{\varphi}_i$ 与 $\bar{\varphi}_{i-1}$ 相除, 得到:

$$\begin{aligned} & \det \left(g_{\alpha\bar{\beta}} + \frac{\partial^2 \bar{\varphi}_i}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta} \right) \det \left(g_{\alpha\bar{\beta}} + \frac{\partial^2 \bar{\varphi}_{i-1}}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta} \right)^{-1} \\ &= \exp \{ k\bar{\varphi}_i - k\bar{\varphi}_{i-1} + F(x, \bar{\varphi}_{i-1}) - F(x, \bar{\varphi}_{i-2}) - k(\bar{\varphi}_{i-1} - \bar{\varphi}_{i-2}) \}. \end{aligned}$$

因为由归纳假设, 有 $\bar{\varphi}_0 \geq \bar{\varphi}_{i-2} \geq \bar{\varphi}_{i-1} \geq \bar{\varphi}_0$, 结合 F 关于第二个变量不减, 用与 (4.16) 相同的讨论即可得到:

$$\det \left(g_{\alpha\bar{\beta}} + \frac{\partial^2 \bar{\varphi}_i}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta} \right) \det \left(g_{\alpha\bar{\beta}} + \frac{\partial^2 \bar{\varphi}_{i-1}}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta} \right)^{-1} \geq \exp \{ k\bar{\varphi}_i - k\bar{\varphi}_{i-1} \}.$$

与 (4.16) 相同的讨论, 有 $\bar{\varphi}_{i-1} \geq \bar{\varphi}_i$. 类似的可以得到 $\bar{\varphi}_{i-1} \leq \bar{\varphi}_i$.

还剩 (4.12) 中第三个不等号 $\bar{\varphi}_i \geq \bar{\varphi}_i$ 需要证明。

在 (4.9) 中分别取 $\bar{\varphi}_i, \bar{\varphi}_i$ 相除, 我们有:

$$\begin{aligned} & \det \left(g_{\alpha\bar{\beta}} + \frac{\partial^2 \bar{\varphi}_i}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta} \right) \det \left(g_{\alpha\bar{\beta}} + \frac{\partial^2 \bar{\varphi}_i}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta} \right)^{-1} \\ &= \exp \{ k\bar{\varphi}_i - k\bar{\varphi}_i + F(x, \bar{\varphi}_{i-1}) - F(x, \bar{\varphi}_{i-1}) - k\bar{\varphi}_{i-1} + k\bar{\varphi}_{i-1} \}. \end{aligned}$$

由 $\bar{\varphi}_i \geq \bar{\varphi}_{i-1}$ 反复用归纳假设可以得到, $\bar{\varphi}_i \geq \bar{\varphi}_i$.

所以对任意正整数 i , 原不等式 (4.12) 成立, 并且因此 $\bar{\varphi}_i, \bar{\varphi}_i$ 均一致有界。这就给出了 (4.9) 中解的 C^0 估计。

从方程的结构可以看到, 如果令 i 趋向于无穷, 由夹逼准则, 解将会收敛到唯一极限函数 φ , 从而方程将会收敛到 (4.1), 因此我们就得到了目标复蒙日-安培方程解的 C^0 估计。

4.2 更一般复蒙日-安培方程解的 C^2 估计

接着我们计算 (4.9) 中方程解 $\bar{\varphi}_i$ 的 C^2 估计, 事实上关于 $\bar{\varphi}_i$ 的估计也是类似的。我们要给出 $\frac{\partial^2 \bar{\varphi}_i}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta}$ 的一致估计, 由方程和均值不等式, 我们只需估计 $\sup_M \Delta \bar{\varphi}_i$. 与第一章中的 C^2 估计类似, 区别在于此处的右端项从 $\exp\{F\}$ 变得更复杂, 但所有计算都是类似的, 只需要将之前的 F 换为现在更一般复蒙日-安培方程的右端项函数。并且现在我们已经有了 C^0 估计。

记 Δ_i 为关于度量 $\sum_{\alpha,\beta} \left(g_{\alpha\bar{\beta}} + \frac{\partial^2 \bar{\varphi}_i}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta} \right) dz^\alpha \otimes d\bar{z}^\beta$ 的拉普拉斯算子。记 C 为一个正常数, 满足 $C + \inf_{i \neq l} (R_{i\bar{i}l\bar{l}}) > 1$, 为了给出二阶估计, 我们仍然考虑函数

$\Delta_i[\exp\{-C\bar{\varphi}_i\}(m + \Delta\bar{\varphi}_i)]$, 用与 (2.19) 类似的计算:

$$\begin{aligned} \Delta_i[\exp\{-C\bar{\varphi}_i\}(m + \Delta\bar{\varphi}_i)] &= \exp\{-C\bar{\varphi}_i\} \left[k(\Delta\bar{\varphi}_i - \Delta\bar{\varphi}_{i-1}) + \sum_{\alpha,\beta} g^{\alpha\bar{\beta}} \frac{\partial F(x, \bar{\varphi}_{i-1})}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta} \right. \\ &\quad + \sum_{\alpha,\beta} g^{\alpha\bar{\beta}} \frac{\partial^2 F(x, \bar{\varphi}_{i-1})}{\partial t \partial z^\alpha} \frac{\partial \bar{\varphi}_{i-1}}{\partial \bar{z}^\beta} + \sum_{\alpha,\beta} g^{\alpha\bar{\beta}} \frac{\partial^2 F(x, \bar{\varphi}_{i-1})}{\partial t \partial \bar{z}^\beta} \frac{\partial \bar{\varphi}_{i-1}}{\partial z^\alpha} \\ &\quad + \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(x, \bar{\varphi}_{i-1}) \sum_{\alpha,\beta} g^{\alpha\bar{\beta}} \frac{\partial \bar{\varphi}_{i-1}}{\partial z^\alpha} \frac{\partial \bar{\varphi}_{i-1}}{\partial \bar{z}^\beta} \\ &\quad \left. + \frac{\partial F}{\partial t}(x, \bar{\varphi}_{i-1}) \Delta\bar{\varphi}_{i-1} - m^2 \inf_{i \neq l} R_{i\bar{i}l\bar{l}} \right] - C \exp\{-C\bar{\varphi}_i\} m(m + \Delta\bar{\varphi}_i) \\ &\quad + \left(C + \inf_{i \neq l} (R_{i\bar{i}l\bar{l}}) \right) \exp\{-C\bar{\varphi}_i\} (m + \Delta\bar{\varphi}_i) \left(\sum_{\alpha} \frac{1}{1 + (\bar{\varphi}_i)_{\alpha\bar{\alpha}}} \right). \end{aligned} \quad (4.17)$$

上式右端中括号里的项来自于对复合函数 $F(x, \varphi(x))$ 求关于初始度量 $\sum_{\alpha,\beta} g_{\alpha\bar{\beta}} dz^\alpha \otimes d\bar{z}^\beta$ 的拉普拉斯得到。

我们已经估计过 $\sup_M |\bar{\varphi}_i|$, 并且 $\bar{\varphi}_i$ 的 $L^1(M)$ 估计仅与函数的最大值, 紧流形 M 的格林函数有关。所以仿照第一章中式 (2.33) 我们可以给 $\bar{\varphi}_i$ 的 $L^1(M)$ 估计。所以由 Schauder 估计可知, 存在与 i 无关的常数 C_1 , 满足:

$$\sup_M |\nabla \bar{\varphi}_i| \leq C_1 \left(\sup_M |\Delta \bar{\varphi}_i| + 1 \right). \quad (4.18)$$

类似 (2.23) 可以得到, 存在与 i 无关的常数 C_2 , 满足:

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} \frac{1}{1 + (\bar{\varphi}_i)_{\alpha\bar{\alpha}}} &\geq (m + \Delta\bar{\varphi}_i)^{1/(m-1)} \left(\exp \left\{ \frac{-k}{m-1} (\bar{\varphi}_i - \bar{\varphi}_{i-1}) + \frac{1}{m-1} F(x, \bar{\varphi}_{i-1}) \right\} \right) \\ &\geq C_2 (m + \Delta\bar{\varphi}_i)^{1/(m-1)}. \end{aligned}$$

上式第二行是因为我们已经得到 $\bar{\varphi}_i$ 的 C^0 估计, 所以 F 只在紧集上取值, 因此有界。

通过上述计算, 将上式, (4.18), 以及 C^0 估计, 代入 (4.17). 我们只需要关注二阶项, 因为其余低阶项都已经有了估计。特别的, 注意 (4.17) 中第三行, 我们有估计:

$$|\nabla \varphi|^2 \geq -|\nabla \varphi| \geq -\sup_M |\nabla \varphi| \geq -C_1 \left(\sup_M |\Delta \bar{\varphi}_i| + 1 \right).$$

所以我们可以得到, 存在不依赖于 i 的正常数 C_3, C_4, C_5, C_6 满足:

$$\begin{aligned} \Delta_i[\exp\{-C\bar{\varphi}_i\}(m + \Delta\bar{\varphi}_i)] &\geq -C_3 \left(m + \sup_M \Delta\bar{\varphi}_i \right) - C_4 \left(m + \sup_M \Delta\bar{\varphi}_{i-1} \right) \\ &\quad + C_5 \left(m + \sup_M \Delta\bar{\varphi}_i \right)^{1+1/(m-1)} - C_6. \end{aligned}$$

在 $\exp \{-C\bar{\varphi}_i\} (m + \Delta\bar{\varphi}_i)$ 取到最大值的点处, 上式左端小于等于 0, 所以有:

$$C_5 \left(m + \sup_M \Delta\bar{\varphi}_i \right)^{1+1/(m-1)} \leq C_3 \left(m + \sup_M \Delta\bar{\varphi}_i \right) + C_4 \left(m + \sup_M \Delta\bar{\varphi}_{i-1} \right) + C_6. \quad (4.19)$$

我们知道, 当对于任意 $x \geq 0$, 我们总可以找到充分大的 $a, b > 0$, 使得:

$$x^{1+1/(m-1)} \geq ax - b.$$

因此我们总可以找到常数 C_7, C_8 , 使得对于任意 $x \geq 0$, 都有:

$$\left(m + \sup_M \Delta\bar{\varphi}_i \right)^{1+1/(m-1)} \geq C_7 \left(m + \sup_M \Delta\bar{\varphi}_i \right) - C_8. \quad (4.20)$$

所以将 (4.20) 代入式 (4.19) 即有:

$$C_5 C_7 \left(m + \sup_M \Delta\bar{\varphi}_i \right) - C_5 C_8 \leq C_3 \left(m + \sup_M \Delta\bar{\varphi}_i \right) + C_4 \left(m + \sup_M \Delta\bar{\varphi}_{i-1} \right) + C_6.$$

移项后得到:

$$(C_5 C_7 - C_3) \left(m + \sup_M \Delta\bar{\varphi}_i \right) \leq C_4 \left(m + \sup_M \Delta\bar{\varphi}_{i-1} \right) + C_6 + C_5 C_8.$$

我们选取 C_7 充分大, 使得上式两边同除 $C_5 C_7 - C_3$ 之后, 确保等式右边第一项系数小于 $\frac{1}{2}$, 所以存在与 i 无关的正常数 $\tilde{C}$, 满足:

$$\left(m + \sup_M \Delta\bar{\varphi}_i \right) \leq \frac{1}{2} \left(m + \sup_M \Delta\bar{\varphi}_{i-1} \right) + \tilde{C}.$$

有了上式, 我们可以进行迭代, 反复迭代上式, 即得到 $\Delta\bar{\varphi}_i$ 的上界估计:

$$m + \sup_M \Delta\bar{\varphi}_i \leq \left(\frac{1}{2} \right)^i \left(m + \sup_M \Delta\bar{\varphi}_0 \right) + 2\tilde{C}.$$

由定理 2 我们知道上式右端有界, 因此得到了 C^2 估计, 由复蒙日-安培方程本身可知, 事实上我们有一致的二阶估计。

4.3 更一般复蒙日-安培方程解的 C^3 估计

接着类似的我们给出 C^3 估计: 即给出 $\frac{\partial^3 \bar{\varphi}_i}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta \partial z^\gamma}$ 的一致估计, 类似第一章中, 我们定义:

$$S_i := \sum g_i^{\alpha\bar{l}} g_i^{\beta\bar{p}} g_i^{\gamma\bar{q}} \frac{\partial^2 \bar{\varphi}_i}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta \partial z^\gamma} \frac{\partial^2 \bar{\varphi}_i}{\partial \bar{z}^l \partial z^p \partial \bar{z}^q}.$$

其中, 矩阵 $\left(g_i^{\alpha\bar{l}}\right)$ 为 $\left(g_{\alpha\bar{l}} + \frac{\partial^2 \bar{\varphi}_i}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^l}\right)$ 的逆矩阵. 由类似 (2.76) 的计算, 我们可以得到:

$$\Delta_i(S_i + C_9 \Delta \bar{\varphi}_i) \geq C_{10} S_i - C_{11} \sqrt{S_i} \sqrt{S_{i-1}} - C_{12}, \quad (4.21)$$

其中 $C_9, C_{10}, C_{11}, C_{12}$ 均为与 i 无关的正常数.

我们已经得到 $|\Delta \bar{\varphi}_i|$ 的估计, 由极值原理可以得到:

$$\sup_M S_i \leq \frac{C_{11}}{C_{10}} \sqrt{\sup_M S_i} \sqrt{\sup_M S_{i-1}} + \frac{C_{12}}{C_{10}} + C_9 \sup_M |\Delta \bar{\varphi}_i|.$$

因为在 (4.21) 中, 我们可以调整 C_9, C_{12} 的大小, 使得 C_{10} 变大, 所以不妨假设, $\frac{C_{11}}{C_{10}} \leq \frac{1}{2}$, 由上式可得:

$$\sup_M S_i \leq \frac{1}{3} \sup_M S_{i-1} + \frac{4C_{12}}{C_{10}} + 4C_9 \sup_M |\Delta \bar{\varphi}_i|.$$

继续迭代上式, 即得到 S_i 的一致估计, 因此得到 $\frac{\partial^3 \bar{\varphi}_i}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta \partial \bar{z}^\gamma}$ 的一致估计.

有了 $\bar{\varphi}_i$ 的各阶估计, 只需要令 i 趋于无穷, 就得到一个满足方程 (4.1) 的解 φ , 并且 Schauder 理论保证了 φ 仍为一个光滑解.

所以我们得到了如下定理:

定理 4. 记 M 为凯勒流形, 其凯勒度量记为 $\sum_{i,\bar{j}} g_{i\bar{j}} dz^i \otimes d\bar{z}^j$. 记 F 为定义在 $M \times \mathbb{R}$ 上的光滑函数, 且满足 $\frac{\partial F}{\partial t} \geq 0$. 假设预先知道存在一个定义在 M 上的光滑函数 ψ , 满足 $\int_M \exp\{F(x, \psi(x))\} = \text{Vol}(M)$.

则存在一个 M 上的光滑函数 φ , 满足方程:

$$\det \left(g_{i\bar{j}} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} \right) = \exp\{F(x, \varphi)\} \det(g_{i\bar{j}}).$$

并且 $\sum_{i,\bar{j}} \left(g_{i\bar{j}} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} \right) dz^i \otimes d\bar{z}^j$ 仍为一个凯勒度量. 更进一步, 若两个光滑函数同时满足上述条件, 则它们至多只差一个常数.

4.4 $c_1(M) \leq 0$ 时凯勒-爱因斯坦度量的存在唯一性

接下来我们说明一定条件下, 紧凯勒流形上凯勒-爱因斯坦度量的存在唯一性.

定义 2. 凯勒流形 (M, ω, J) 的凯勒度量 ω 称为凯勒爱因斯坦度量, 指存在一个常数 λ 使得:

$$\text{Ric}(\omega) = \lambda \omega.$$

因为凯勒形式 $Ric(\omega) := \sqrt{-1}R_{i\bar{j}}dz^i \wedge d\bar{z}^j = -\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\log\det(g_{i\bar{j}})$ 是伸缩不变, 我们不妨在上式中取 λ 为 $-1, 0, 1$.

因为 $\frac{1}{2\pi}\sqrt{-1}R_{i\bar{j}}dz^i \wedge d\bar{z}^j$ 为流形第一陈类的代表元, 所以当流形的第一陈类有确定符号时, 我们应该找相应符号的 λ , 例如当流形第一陈类负定, 即存在其中的代表元, 系数矩阵为负定矩阵, 即 $c_1(M) < 0$ 时, 我们应寻找满足 $Ric(\omega) = -\omega$ 的凯勒-爱因斯坦度量。

特别的, 我们把第一陈类负定的凯勒流形称为 General Type; 第一陈类等于 0 时, 流形的 Ricci 曲率处处为 0, 即 Ricci 平坦, 我们把这种特殊流形称为卡拉比-丘流形; 第一陈类正定的流形称为 Fano 流形。

当 $c_1(M) = 0$ 时, 我们需要寻找度量, 使得其 Ricci 曲率恒等于 0, 由定理 3, 我们立刻知道凯勒-爱因斯坦度量的存在唯一性。所以接下来我们考虑 $c_1(M) < 0$ 的情况。

我们将利用上节所证明的定理 4.

我们知道 $-\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar{\partial}\log\det(g_{i\bar{j}})$ 为凯勒流形 (M, ω) 第一陈类 $c_1(M)$ 的代表元。由于 $c_1(M) < 0$, 即 $-c_1(M) > 0$, 即存在一个正定的 $(1, 1)$ -形式, 记 $\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\sum_{i,j}g_{i\bar{j}}dz^i \wedge d\bar{z}^j$ 为 $-c_1(M)$ 的代表元, 等价于 $-\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\sum_{i,j}g_{i\bar{j}}dz^i \wedge d\bar{z}^j$ 为 $c_1(M)$ 的代表元, 由 $\partial\bar{\partial}$ -引理, 存在一个光滑实值函数 f , 满足:

$$-\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar{\partial}\log\det(g_{i\bar{j}}) + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\sum_{i,j}g_{i\bar{j}}dz^i \wedge d\bar{z}^j = -\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar{\partial}f.$$

上式等价于:

$$-\partial\bar{\partial}\log\det(g_{i\bar{j}}) = -\sum_{i,j}g_{i\bar{j}}dz^i \wedge d\bar{z}^j - \partial\bar{\partial}f. \quad (4.22)$$

在定理 4 中, 我们考虑方程的特殊形式, 取 $F(x, \varphi) = \varphi - f$:

$$\det\left(g_{i\bar{j}} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^i \partial \bar{z}^j}\right) = \exp\{\varphi - f\} \det(g_{i\bar{j}}). \quad (4.23)$$

上式两边取 $-\partial\bar{\partial}\log$:

$$-\partial\bar{\partial}\log\det\left(g_{i\bar{j}} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^i \partial \bar{z}^j}\right) = -\partial\bar{\partial}\varphi + \partial\bar{\partial}f - \partial\bar{\partial}\log\det(g_{i\bar{j}}). \quad (4.24)$$

由上述定理 4, 我们知道存在光滑解 φ , 使得 $\sum_{i,j}\left(g_{i\bar{j}} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^i \partial \bar{z}^j}\right) dz^i \otimes d\bar{z}^j$ 仍为凯

勒度量。结合上述两式 (4.22), (4.24) 我们得到:

$$\begin{aligned} -\partial\bar{\partial}\log\det\left(g_{i\bar{j}}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^i\partial\bar{z}^i}\right) &= -\partial\bar{\partial}\varphi + \partial\bar{\partial}f - \sum_{i,j} g_{i\bar{j}} dz^i \wedge d\bar{z}^j - \partial\bar{\partial}f \\ &= -\sum_{i,j} \left(g_{i\bar{j}} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^i\partial\bar{z}^j}\right) dz^i \wedge d\bar{z}^j. \end{aligned}$$

即:

$$\begin{aligned} Ric_{\omega_\varphi} &= -\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\log\det\left(g_{i\bar{j}}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^i\partial\bar{z}^i}\right) \\ &= -\sqrt{-1}\sum_{i,j} \left(g_{i\bar{j}} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^i\partial\bar{z}^j}\right) dz^i \wedge d\bar{z}^j \\ &= -\omega_\varphi. \end{aligned}$$

因此我们找到了满足条件的凯勒-爱因斯坦度量。

接着说明唯一性:

记 $\sum_{i,j} g_{i\bar{j}} dz^i \otimes d\bar{z}^j$ 为流形的凯勒-爱因斯坦度量, 记 $\sum_{i,j} \tilde{g}_{i\bar{j}} dz^i \otimes d\bar{z}^j$ 为另一凯勒-爱因斯坦度量, 因为 $Ric_{\omega_{\tilde{g}}} = -\omega_{\tilde{g}}$, 左端为第一陈类中的代表元, 所以 $\omega_{\tilde{g}}$ 也为第一陈类的代表元, 因此我们可以找到光滑函数 ψ , 使得 $\tilde{g}_{i\bar{j}} = g_{i\bar{j}} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^i\partial\bar{z}^j}$, 另一方面, 由凯勒-爱因斯坦度量的定义, 我们有:

$$\begin{aligned} -\partial\bar{\partial}\log\det\left(g_{i\bar{j}}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^i\partial\bar{z}^i}\right) &= -\sum_{i,j} g_{i\bar{j}} dz^i \wedge d\bar{z}^j - \partial\bar{\partial}\psi \\ &= -\partial\bar{\partial}\log\det(g_{i\bar{j}}) + \partial\bar{\partial}f - \partial\bar{\partial}\psi. \end{aligned}$$

移项, 可知有:

$$\partial\bar{\partial}\log\left[\det\left(g_{i\bar{j}}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^i\partial\bar{z}^j}\right)\det(g_{i\bar{j}})^{-1}\exp\{-\psi+f\}\right]=0.$$

即:

$$\log\left[\det\left(g_{i\bar{j}}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^i\partial\bar{z}^j}\right)\det(g_{i\bar{j}})^{-1}\exp\{-\psi+f\}\right].$$

为多调和函数 (pluriharmonic function), 分部积分即知道, 闭流形上的多调和函数只有常数, 因此上式恒等于一个常数 c , 因此有:

$$\det\left(g_{i\bar{j}}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^i\partial\bar{z}^j}\right) = \exp\{\psi+c-f\}\det(g_{i\bar{j}}).$$

由引理 3 可知 $\varphi - \psi$ 为一个常数, 因此我们有:

$$\sum_{i,j} \tilde{g}_{i\bar{j}} dz^i \otimes d\bar{z}^j = \sum_{i,j} \left(g_{i\bar{j}} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^i\partial\bar{z}^j}\right) dz^i \otimes d\bar{z}^j = \sum_{i,j} \left(g_{i\bar{j}} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^i\partial\bar{z}^i}\right) dz^i \otimes d\bar{z}^j.$$

即证明了凯勒-爱因斯坦度量的唯一性, 所以我们得到如下定理:

定理 5. 记 (M, ω, J) 为满足 $c_1(M) \leq 0$ 的凯勒流形, 则其上存在唯一凯勒-爱因斯坦度量。

第五章 总结与展望

本论文是关于丘成桐在卡拉比猜想上研究成果的一篇综述，该成果是几何分析发展过程中的一个里程碑。论文详细介绍了复蒙日-安培方程的先验估计技巧，该方程光滑解的存在唯一性，以及在凯勒-爱因斯坦度量存在唯一性问题中的应用，并在原始文献的基础上补充了大量证明细节。

卡拉比猜想的解决对几何、代数甚至理论物理都有深远影响。其证明也催生了用分析的方法解决几何问题这一研究框架，反之也推动了对方程的研究。第一陈类非正的紧凯勒流形上凯勒-爱因斯坦度量存在性问题解决之后，引出了一系列新的问题、概念和研究方法，比如 Fano 流形凯勒爱因斯坦度量的存在性，与 K-稳定性密切相关，而稳定性的概念又在代数几何中被广泛研究；第一陈类消失的紧凯勒流形，以及其上的凯勒-爱因斯坦度量构成卡拉比-丘流形，这类流形在理论物理中也有重要意义，他们是弦理论的重要模型。

丘成桐解决卡拉比猜想的方法：将几何问题转化为非线性方程光滑解的存在性问题，使用连续性方法求解方程，为此需要进行各阶先验估计。这套方法也成为今后几何分析研究中的标准流程。同时，该方法也可以被应用在多种问题中，例如特殊度量的存在性、Ricci Flow 中与解的奇点相关的问题、一定条件下 Ricci Soliton 的分类问题等等。

参考文献

- [Cal54] E. Calabi. “The space of Kähler metrics”. In: *Proceedings of the International Congress of Mathematics 2* (1954), p. 206.
- [Cal58] E. Calabi. “Improper affine hyperspheres of convex type and a generalization of a theorem by K. Jörgens.” In: *Michigan Mathematical Journal* 5 (1958), pp. 105–126.
- [Che46] S. S. Chern. “Characteristic Classes of Hermitian Manifolds”. In: *Annals of Mathematics* 47 (1946), p. 85.
- [Eva10] L.C. Evans. *Partial Differential Equations*. Graduate studies in mathematics. American Mathematical Society, 2010.
- [Huy05] D. Huybrechts. *Complex Geometry: An Introduction*. Universitext (Berlin. Print). Springer, 2005.
- [Li12] P. Li. *Geometric Analysis*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 2012.
- [Mor66] C. B. Morrey. “Multiple Integrals in the Calculus of Variations”. In: 1966.
- [Sch69] J.T. Schwartz. *Nonlinear Functional Analysis*. Notes on mathematics and its applications. Gordon and Breach, 1969.
- [Tia00] G. Tian. *Canonical Metrics in Kähler Geometry*. Canonical Metrics in Kähler Geometry. Birkhäuser, 2000.
- [Yau78] S. T. Yau. “On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation. I”. In: *Comm. Pure Appl. Math.* 31.3 (1978), pp. 339–411.

致谢

我要感谢我的导师张振雷老师。张老师在每个关键时间点，恰到好处的给予我指导。

在入学之前张老师曾对我讲，来这边之后认真上一遍基础课，打好基础；研一时，张老师鼓励我多学些东西，跟我说年轻人，时间总是够用的，因此我也选了较高级的课程，使我得以拥有更丰富的视野；研二，要开始讲讨论班时，张老师跟我说内容要讲仔细；我开始阅读丘成桐解决卡拉比猜想的文章时，张老师嘱咐我困难之处要自己推过去，因此在读论文时虽然痛苦，在理解其中奥妙之后却倍感振奋开心；研三，在我需要确定自己的去向时，张老师给予我极大帮助，给我很多切实的建议，并且一直关心我的情况。每每想起和张老师的对话，我都备受激励。在跟张老师学习的过程中，我接触到的不仅有深刻的数学知识、一流数学家看待问题的视角、观点；还有对待学术、工作的认真态度，为人处事的风格。这些潜移默化的示范同样令我受益无穷。

我还要感谢给予我巨大帮助的宋剑老师，戎小春老师，宋翀老师，杨波老师，方昊老师，没有他们的支持，我很难坚持走这么远。感谢牛艳艳老师，胥世成老师，沈伟明老师，周杰老师的悉心教导，从他们那里我学到许多知识。

感谢我的师兄师姐们，特别感谢张雷师兄，沈文师兄，任天寅学长，他们同样是我学习生活路上的良师益友，帮我排忧解难；感谢谭盛师兄，和我分享许多经验；感谢岳文艳师姐，在生活各处对我的关照。感谢我的研究生同学侯林坊，王干齐，渠梦豪，他们和我一同度过了宝贵的三年时光。